ISCID - PRÉPA 2ème année - Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion 2 - 2012/2013

CORRECTION Exercices Chapitre 3 - Dimension finie.

Exercice 53

1. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in A$. On a alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = 1$.
   (a) L'associativité de l'addition (interne) dans A découle de celle dans $\mathbb{R}^2$ (et de celle dans $\mathbb{R}$ finalement). En effet, on a d'une part $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix}$.
   D'autre part, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix}$. On a donc bien $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
   (b) Élément neutre pour l'addition. Cherchons $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in A$ (donc vérifiant $e_1 + e_2 = 1$) tel que $\vec{u} + \vec{e} = \vec{e} + \vec{u} = \vec{u}$. On a tout d'abord
   $$\vec{u} + \vec{e} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + e_1 \\ u_2 + e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + e_1 = u_1 \\ u_2 + e_2 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}.$$
   Cependant, on remarque que $e_1 + e_2 = 0 + 0 \neq 1$ donc $\vec{e} \notin A$. Par conséquent, le travail s'arrête ici, A n'est pas un espace vectoriel.
2. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in B$. On a alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $2u_1 - 5u_2 + u_3 = 2v_1 - 5v_2 + v_3 = 2w_1 - 5w_2 + w_3 = 0$ et $u_2 + u_3 = v_2 + v_3 = w_2 + w_3 = 0$. Soient également $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   (a) L'associativité de l'addition (interne) dans B découle de celle dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Élément neutre pour l'addition. Cherchons $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in B$ (donc vérifiant $2e_1 - 5e_2 + e_3 = 0$ et $e_2 + e_3 = 0$) tel que $\vec{u} + \vec{e} = \vec{u} + \vec{e} = \vec{u}$. On obtient rapidement (comme précédemment) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Comme $2e_1 - 5e_2 + e_3 = 0$ et $e_2 + e_3 = 0$, on a bien $\vec{e} \in B$.
   (c) Opposé. Cherchons $\vec{u'} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} \in B$ (donc vérifiant $2u'_1 - 5u'_2 + u'_3 = 0$ et $u'_2 + u'_3 = 0$) tel que $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{u'} + \vec{u} = \vec{e}$. On a
   $$\vec{u} + \vec{u'} = \vec{e} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 + u'_1 \\ u_2 + u'_2 \\ u_3 + u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u'_1 &= 0 \\ u_2 + u'_2 &= 0 \\ u_3 + u'_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = -u_1 \\ u'_2 = -u_2 \\ u'_3 = -u_3 \end{cases}$$
   De plus, comme $\vec{u} \in B$,
   $$\begin{cases} 2u_1 - 5u_2 + u_3 &= 0 \\ u_2 + u_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(2u_1 - 5u_2 + u_3) &= 0 \\ -(u_2 + u_3) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u'_1 - 5u'_2 + u'_3 &= 0 \\ u'_2 + u'_3 &= 0 \end{cases}$$
   Par conséquent, $\vec{u'} \in B$.
   (d) La commutativité de l'addition dans B découle de celle dans $\mathbb{R}^3$ (et de celle dans $\mathbb{R}$ finalement) :
   $$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ v_3 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{u}.$$
   (e) L'associativité de la multiplication (externe) dans B découle de celle dans $\mathbb{R}^3$ (et de celle dans $\mathbb{R}$ finalement) :
   $$\lambda(\mu\vec{u}) = \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu u_1 \\ \mu u_2 \\ \mu u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu u_1 \\ \lambda\mu u_2 \\ \lambda\mu u_3 \end{pmatrix} = \lambda\mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (\lambda\mu)\vec{u}.$$

(f) Élément neutre pour la multiplication. On a bien

$$1 \times \vec{u} = 1 \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times u_1 \\ 1 \times u_2 \\ 1 \times u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

(g) Distributivité (1) : on a

$$(\lambda+\mu)\vec{u} = (\lambda+\mu) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)u_1 \\ (\lambda+\mu)u_2 \\ (\lambda+\mu)u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu u_1 \\ \lambda u_2 + \mu u_2 \\ \lambda u_3 + \mu u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu u_1 \\ \mu u_2 \\ \mu u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}.$$

(h) Distributivité (2) : on a

$$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(u_1+v_1) \\ \lambda(u_2+v_2) \\ \lambda(u_3+v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \lambda v_1 \\ \lambda u_2 + \lambda v_2 \\ \lambda u_3 + \lambda v_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}.$$

Par conséquent, B est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. C n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car - entre autres - il n'existe pas d'élément neutre dans C. Le vecteur nul $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, élément neutre pour l'addition, est le seul vecteur vérifiant $\vec{v}+\vec{e} = \vec{e}+\vec{v} = \vec{v}$ mais $e_1 + e_2 - 2e_3 = 0 + 0 - 2(0) = 0 \neq -1$. Par conséquent, $\vec{e} \notin C$.
4. D n'est pas un espace vectoriel. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a bien $\vec{u} \in D$ car $(1)^2 + (-1) = 0$. Cependant, l'opposé de $\vec{u}$ pour l'addition est donné par $\vec{u'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais $\vec{u'} \notin D$ car $(-1)^2 + 1 \neq 0$.
5. E est un espace vectoriel. Les 8 propriétés sont vérifiées.
6. F est un espace vectoriel. Les 8 propriétés sont vérifiées.
7. G est constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -X_1 + 5X_2 &= 0 \\ X_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0.$$

G est donc réduit au singleton contenant le vecteur nul. G est un espace vectoriel.

8. H est constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -2X_1 + 5X_2 &= 1 \\ X_1 - X_2 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{11}{3} \\ X_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

H est donc réduit au singleton $\left\{ \dfrac{1}{3}(11,5) \right\}$. H n'est pas un espace vectoriel car - entre autres - le vecteur neutre pour l'addition n'est pas dans H.

9. K est constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 2X_2 + 3X_3 &= 0 \\ 3X_1 + 2X_3 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0.$$

K est donc réduit au singleton contenant le vecteur nul. K est un espace vectoriel.

Exercice 54 On utilise le théorème 3.1.1.

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\vec{0} = (\boxed{0}, 0, 0) \in A$ puisque $\boxed{0} = 0$. Ensuite, $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in A$ (ce qui implique donc que $u_1 = v_1 = 0$), $\vec{u}+\vec{v} = (0, u_2, u_3) + (0, v_2, v_3) = (0, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ et donc $\vec{u} + \vec{v} \in A$. Enfin, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} = \lambda(0, u_2, u_3) = (0, \lambda u_2, \lambda u_3) \in A$.
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\vec{0} = (\boxed{0}, \boxed{0}, 0 \notin B$ (entre-autres) car $\boxed{0} + \boxed{0} \neq 1$).
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ ($\forall \vec{u}, \vec{v} \in C$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} + \vec{v} \in C$ et $\lambda\vec{u} \in C$).
4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\vec{0} = (\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{0}) \notin D$ (entre-autres) car même si $\boxed{0} = 0$, on a $\boxed{0} + \boxed{0} + \boxed{0} \neq 1$.
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \sin(x) = 0\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. On a pourtant $\vec{0} \in E$ car $\sin(0) = 0$. On a également $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in A$ (ce qui implique donc que $\sin(u_1) = \sin(v_1) = 0$), $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ avec $\sin(u_1 + v_1) = \sin(u_1)\cos(v_1) + \cos(u_1)\sin(v_1) = 0$, ce qui implique $\vec{u} + \vec{v} \in E$. Cependant, si on considère $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\vec{u} = (\pi, 0, 0) \in E$, on a $\lambda\vec{u} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ mais $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$ donc $\lambda\vec{u} \notin E$.
6. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\} = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} =< (1,1,1) >$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. On a bien $\vec{0} = (0,0,0) \in F$ car $(0,0,0) = 0(1,1,1)$. Ensuite, si on considère $\vec{u} = (x,x,x)$ et $\vec{v} = (y,y,y)$ ($\vec{u}, \vec{v} \in F$), $\vec{u} + \vec{v} = (x+y, x+y, x+y) = (x+y)(1,1,1) \in F$. Enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x,x,x)$, $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda x, \lambda x) = \lambda x(1,1,1) \in F$.
7. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |x| = |y| = |z|\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. On a $\vec{0} \in G$. Cependant, si $\vec{u} = (-1,1,1)$ et $\vec{v} = (1,1,1)$, on obtient $\vec{u} + \vec{v} = (0,1,1)$ et $|0| \neq (|1| = |1|)$.
8. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car $\vec{0} \notin H$ (entre-autres).
9. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{(0,0,0)\}$. En effet, le seul vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant la condition $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est le vecteur nul $\vec{0}$. On sait dès lors que I est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 55

1. Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de e_1 et e_2 si et seulement s'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ y & = & -\lambda_1 + \lambda_2 \\ z & = & 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{x+z}{3} = y + z \\ \lambda_2 = \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{2x-z}{3} = 2y + z \end{array} \right.$$
ce qui implique donc que x, y, z sont définis de manière très spcifique.
2.
   - Comme $\frac{3-1}{2} = \frac{3+0}{3} = 1 + 0 = 1$ et $\frac{3+1}{2} = \frac{2(3)-0}{3} = 2(1) + 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Par conséquent, $A = e_1 + 2e_2$.
   - Comme $\frac{4-1}{2} \neq \frac{4+0}{3}$, B ne s'exprime pas comme une combinaison linéaire de e_1 et e_2.
   - Comme $\frac{10-(-4)}{2} = \frac{10+11}{3} = -4 + 11 = 7$ et $\frac{10+(-4)}{2} = \frac{2(10)-11}{3} = 2(-4) + 11 = 3$, $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 3$. Par conséquent, $C = 7e_1 + 3e_2$.
   - Comme $\frac{-1-(-3)}{2} = \frac{(-1)+4}{3} = (-3) + 4 = 1$ et $\frac{-1-3}{2} = \frac{2(-1)-4}{3} = 2(-3) + 4 = -2$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Par conséquent, $D = e_1 - 2e_2$.
   - Comme $\frac{1-(-5)}{2} = \frac{1+8}{3} = -5 + 8 = 3$ et $\frac{1+(-5)}{2} = \frac{2(1)-8}{3} = 2(-5) + 8 = -2$, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -2$. Par conséquent, $E = 3e_1 - 2e_2$.
   - Comme $\frac{10-(-2)}{2} \neq \frac{10+9}{3}$, F ne s'exprime pas comme une combinaison linéaire de e_1 et e_2.

Exercice 56

1. Soit $X = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$:
$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'existence (et l'unicité) des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dépend donc de l'inversibilité de la matrice précédente. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, le système linéaire admet une unique solution ce qui prouve l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. Tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.

2. Si on ne dispose que de deux vecteurs e_1, e_2, on se ramène à la résolution du système linéaire :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
D'après la théorie, si A et b désignent repsectivement la matrice de ce nouveau système et son second membre, le système admet une ou plusieurs solutions si $rg(A) = rg([A|b])$. On a $rg(A) = 2$ et $\det([A|b]) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = z - y$ qui n'est pas inconditionnellement nul. Cela signifie donc que le rang de A peut être différent du rang de $[A|X]$. Ainsi, tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas combinaison linéaire de e_1, e_2. Par exemple, $(0, \boxed{1}, \boxed{2})$ n'est pas combinaison linéaire de e_1 et e_2 car $\boxed{2} - \boxed{1} = 1 \neq 0$.

3. On se ramène à la résolution du système linéaire :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Ce système n'admet pas une unique solution car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$. Comme $rg([A|X])$ n'est pas nécessairement égal à $rg(A)$ (tout dépend de X), le système précédent n'admet pas nécessairement de solution. Ainsi, tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas combinaison linéaire de $e_1, e_2, \tilde{e}_3$.

4. On se ramène à la résolution du système linéaire :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
D'après la théorie, si A et b désignent respectivement la matrice de ce nouveau système et son second membre, le système admet une infinité de solutions si $rg(A) = rg([A|X])$ et aucune solution si $rg(A) \neq rg([A|X])$. La deuxième ligne de A étant égale à la troisième et n'étant pas proportionnelle à la première, $rg(A) = 2$. On remarque alors que $[A|X]$ peut être de rang supérieur selon les valeurs de X (si $y \neq z$, la deuxième ligne de $[A|X]$ n'est plus égale à la troisième et implique un rang égal à 3). Par conséquent, tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas combinaison linéaire de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 57 Déterminer le rang d'un famille de vecteurs revient à déterminer le rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille.

1. Soit $\mathcal{F}_1 = ((1,0,1), (-1,0,-1), (2,0,2))$. On remarque rapidement que les 3 vecteurs sont proportionnels donc $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rg(\mathcal{F}_1) = 1$.

2. Soit $\mathcal{F}_2 = ((1,0,1), (-1,0,-1), (2,0,2), (0,1,0), (1,1,1), (1,-2,1))$. On a $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$. En effet, toute sous-matrice carrée issue de la matrice précédente, de taille supérieure ou égale à 3, est inversible. La famille $\mathcal{F}_2$ est de rang 2.

3. On considère la famille $\mathcal{F}_3 = ((1,0,1), (-1,0,-1), (2,0,2), (0,1,0), (1,1,1), (1,-2,-1))$. On a cette fois-ci $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$. On a par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Finalement, la famille $\mathcal{F}_3$ est de rang 3.

4. On considère maintenant la famille $\mathcal{F}_4 = ((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$. On a alors $rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = 2$ (on remarque que les 3e et 4e lignes sont identiques aux 2 premières et que la 2e n'est pas porportionnelle à la 1ère). Par conséquent, $rg(\mathcal{F}_4) = 2$.
5. On considère ensuite la famille $\mathcal{F}_5 = ((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$. On a alors $rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 3$. En effet, on a par exemple $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Par conséquent, $rg(\mathcal{F}_5) = 3$.
6. On considère enfin la famille $\mathcal{F}_6 = ((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$. On a alors $rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 3$. En effet, on a par exemple $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Par conséquent, $rg(\mathcal{F}_6) = 3$.

Exercice 58

1. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement au moins 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $((1,1,0),(0,1,1))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour les 3 familles qui suivent, chacune étant constituée de 3 vecteurs, on peut tester le caractère générateur simplement à l'aide du déterminant de la matrice construite à l'aide des vecteurs donnés.
   Ainsi, puisque $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$, la famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ est génératrice.
3. On observe aisément que $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ donc $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0$, ce qui permet d'affirmer que la famille $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$ n'est pas génératrice.
4. Comme $\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix} = 0$, la famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ n'est pas génératrice.
5. Déterminons le rang de $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$. Les 3 premiers vecteurs forment une famille génératrice (voir 2.) donc le rang de $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$ est égal à 3. Par conséquent, la famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$ est génératrice.

Exercice 59

1. On travaille dans $\mathbb{R}^4$. Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ contient nécessairement au moins 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
2. Comme $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1$, la famille $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$ est une famille génératrice.
3. Comme $\begin{vmatrix}1 & 5 & 8 & 1\\ 2 & 6 & 9 & 0\\ 3 & 7 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = -252 \neq 0$, la famille $((1,2,3,4),(5,6,7,0),(8,9,0,0),(1,0,0,0))$ est génératrice.
4. On remarque immédiatement que le 3e vecteur de la famille est égal au 2e moins le 1er donc la famille n'engendre qu'un espace constitué de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$ n'est pas génératrice.
5. Comme $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0$, la famille $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$ est génératrice.

Exercice 60

1. La famille $((1,1,0),(0,1,1))$ est libre car les deux vecteurs sont linéairement indépendants.

2. La famille $((1,1,0),(-1,-1,0))$ n'est pas libre car les deux vecteurs sont linéairement indépendants ; en effet $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$.
3. La famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ est libre car $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
4. La famille $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$ n'est pas libre car $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\-1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0$.
5. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement au plus 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$ n'est donc pas libre.

Exercice 61

1. On remarque que le 3e vecteur est égal à 5 fois le 1er moins 2 fois le 2e. Par conséquent, la famille $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$ n'est pas libre.
2. On remarque que le 3e vecteur est égal à 3 fois le 1er moins 1 fois le 2e. Par conséquent, la famille $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$ n'est pas libre.
3. Comme $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1$, la famille $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$ est une famille libre.
4. On a déjà remarqué précédemment que le 3e vecteur de la famille était égal au 2e moins le 1er donc la famille $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$ n'est pas libre.
5. Comme $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0$, la famille $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$ est libre.

Exercice 62 $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, la famille $\mathcal{B}' = (v_1,v_2,v_3)$ peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' &= (-2e_1 - 4e_2 + 5e_3, 3e_1 + 4e_2 - 5e_3, -4e_1 - 7e_2 + 10e_3)\\ &= \left(-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, -4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-7\\10\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}'$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

- Montrons que $\mathcal{B}'$ est génératrice : soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, montrons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-4\\-7\\10\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3\\-4\lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3\\5\lambda_1 - 5\lambda_2 + 10\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\-4 & 4 & -7\\5 & -5 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}.$$
Comme $\begin{vmatrix}-2 & 3 & -4\\-4 & 4 & -7\\5 & -5 & 10\end{vmatrix} = 5 \neq 0$, le système précédent admet une unique solution ce qui prouve l'existence de $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ et donc le caractère générateur de la famille (v_1,v_2,v_3).
- Montrons que $\mathcal{B}'$ est libre. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$.
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\-4 & 4 & -7\\5 & -5 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On a vu précédemment que la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ était inversible donc le système précédent admet une unique solution qui est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ ce qui implique le caractère libre de la famille (v_1, v_2, v_3). Conclusion, la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 63

1. Soit (x, y) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Montrons alors que $\mathcal{S}$ engendre (x, y), c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
Comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, la solution du système précédent existe et est unique, ce qui implique donc que la famille $\mathcal{S}$ engendre $\mathbb{R}^2$.
2. La famille $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant une condition nécessaire et suffisante pour démontrer son caractère libre et générateur.

Exercice 64

- Dans un premier temps, d'après le théorème 3.2.2, B_1 et B_5 ne peuvent être des bases de $\mathbb{R}^3$ car elles possèdent respectivement 2 et 4 éléments.
- B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. On note cependant que la 2e ligne de la matrice est égale à la 3e donc la matrice n'est pas inversible et la famille B_2 n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- B_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, la famille B_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.
- B_4 est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, la famille B_4 est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 65 Posons $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = 2X \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les 2e et 3e lignes de la matrice précédente sont proportionnelles à la 1ère, ce qui indique que la matrice est non-inversible (ou singulière) et que le système admet une infinité de solutions de la forme $(x, y, z) = (2y - z, y, z) = (2y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. Par conséquent,
$$F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y - z\}.$$

1. Montrons maintenant que F est un e.v. ou encore un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. On a tout d'abord $(0, 0, 0) \in F$ car $(0) = 2(0) - (0)$. Ensuite, si $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$ (donc $x_1 = 2y_1 - z_1$ et $x_2 = 2y_2 - z_2$ $(\star 1)$), on a $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3$ avec $x_1 + x_2 \overset{(\star 1)}{=} (2y_1 - z_1) + (2y_2 - z_2) = 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$ ce qui implique donc que $v_1 + v_2 \in F$. Enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y, z) \in F$ (donc $x = 2y - z \quad (\star 2)$), $\lambda v = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\lambda x \overset{(\star 2)}{=} \lambda(y - 2z) = \lambda y - 2\lambda z$ ce qui implique donc que $\lambda x \in F$.
2. On sait que tout vecteur dans F s'écrit sous la forme $(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$ avec $y, z \in \mathbb{R}$. Par conséquent, une famille génératrice de F est $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
3. Cette famille génératrice est une base de F car elle est également libre :
$$\lambda(2, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Exercice 66

- Soit $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$.
  1. Soit $(x, y) \in E_1$ alors $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$. On en déduit qu'un seul vecteur est nécessaire pour exprimer un élément quelconque de E_1 à avoir le vecteur $(1, -1)$ (ou tout vecteur qui lui est proportionnel). On a donc $\dim(E_1) = 1$.
  2. Une base de E_1 est $((1, -1))$.
- Soit $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$.
  1. Soit $(x, y) \in E_2$ alors $(x, y) = (y, y) = y(1, 1)$. On en déduit qu'un seul vecteur est nécessaire pour exprimer un élément quelconque de E_2 à avoir le vecteur $(1, 1)$ (ou tout vecteur qui lui est proportionnel). On a donc $\dim(E_2) = 1$.
  2. Une base de E_2 est $((1, 1))$.
- Soit $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.
  1. Soit $(x, y, z) \in E_3$ alors $(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. On en déduit que 2 vecteurs sont nécessaires pour exprimer un élément quelconque de E_3 à savoir $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ (ou tous vecteurs qui leur sont proportionnels). On a $\dim(E_3) = 2$.
  2. Une base de E_3 est $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
- Soit $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$.
  1. Soit $(x, y, z) \in E_4$ alors $(x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$. On en déduit qu'un seul vecteur est nécessaire pour exprimer un élément quelconque de E_4 à savoir $(1, 1, 1)$ (ou tout vecteur qui lui est proportionnel). On a $\dim(E_4) = 1$.
  2. Une base de E_4 est $((1, 1, 1))$.

Exercice 67 Une condition nécessaire et suffisante pour que les familles proposées puissent former des bases est qu'elles soient constituées de 3 éléments linéairement indépendants. On va donc compléter les familles avec un nombre adapté de vecteurs libres les plus simples possibles.

1. $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,
2. $((1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,
3. $((1, 1, 1), (1, -1, -1), (0, 0, 1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,
4. $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,
5. $((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,
6. $((1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Exercice 68

- Soit $f_1 : (x, y) \to (-x, -y)$.
  1. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a
  $$f_1(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f_1\left(\lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = f_1\begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda u_1 + \mu v_1) \\ -(\lambda u_2 + \mu v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u_1 \\ -\lambda u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu v_1 \\ -\mu v_2 \end{pmatrix}$$
  $$= \lambda\begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \lambda f_1(\vec{u}) + \mu f_1(\vec{v})$$
  donc f_1 est une application linéaire.
  2. Un point de coordonnées (x, y) est transformé par f_1 en un point de coordonnées $(-x, -y)$. Cela signifie que f_1 agit comme une rotation de centre l'origine $(0, 0)$ et d'angle π (l'application f_1 peut être également vue comme une symétrie par rapport à l'origine).

3. (a) $\text{Ker}(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = (0,0)\}$. Comme $f_1(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-x,-y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_1) = \{\vec{0}\}$. f_1 est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_1) = \{f_1(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $f_1(x,y) = (-x,-y) = x(-1,0) + y(0,-1)$, $\text{Im}(f_1) = < (-1,0), (0,-1) >$ c'est-à-dire l'espace engendré par les deux vecteurs $(-1,0)$ et $(0,-1)$. Comme ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im}(f_1) = \mathbb{R}^2$. f_1 est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_1 est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, f_1 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_1 - I) : (x,y) \mapsto (f_1 - I)(x,y) = f_1(x,y) - (x,y) = (-x,-y) - (x,y) = (-2x,-2y)$. $f_1 - I$ est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ $f_1 - I$ désigne une homothétie (dilatation) de rapport -2.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_1 - I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f_1 - I)(x,y) = (0,0)\}$. Comme $(f_1 - I)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x,-2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_1 - I) = \{\vec{0}\}$. $f_1 - I$ est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_1 - I) = \{(f_1 - I)(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_1 - I)(x,y) = (-2x,-2y) = x(-2,0) + y(0,-2)$, $\text{Im}(f_1 - I) =< (-2,0), (0,-2) >$ c'est-à-dire l'espace engendré par les deux vecteurs $(-2,0)$ et $(0,-2)$. Comme ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im}(f_1 - I) = \mathbb{R}^2$. $f_1 - I$ est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme $f_1 - I$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, $f_1 - I$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_2 : (x,y) \mapsto (x,0)$.

  1. Soient $\vec{u} = (u_1,u_2), \vec{v} = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

  $$\begin{aligned} f_2(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f_2\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = f_2\begin{pmatrix}\lambda u_1 + \mu v_1\\ \lambda u_2 + \mu v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_1 + \mu v_1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu v_1\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix} = \lambda f_2(\vec{u}) + \mu f_2(\vec{v}) \end{aligned}$$

  donc f_2 est une application linéaire.

  2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_2 en un point de coordonnées $(x,0)$. Cela signifie que f_2 agit comme une projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

  3. (a) $\text{Ker}(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_2(x,y) = (0,0)\}$. Comme $f_2(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,0) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0$, $\text{Ker}(f_2) = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1), y \in \mathbb{R}\} =< (0,1) >$. f_2 est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

     (b) $\text{Im}(f_2) = \{f_2(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $f_2(x,y) = (x,0) = x(1,0)$, $\text{Im}(f_2) = \{x(1,0), x \in \mathbb{R}\} = < (1,0) >$. f_2 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,0)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

     (c) Comme f_2 n'est ni injectif ni surjectif, f_2 n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

  4. On a $(f_2 - I) : (x,y) \mapsto (f_2 - I)(x,y) = f_2(x,y) - (x,y) = (x,0) - (x,y) = (0,-y)$. $f_2 - I$ est encore une application linéaire.

     $\tilde{2}$ $f_2 - I$ désigne une projection orthogonale sur l'axe des ordonnées composée par une symétrie par rapport à l'origine.

     $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_2 - I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f_2 - I)(x,y) = (0,0)\}$. Comme $(f_2 - I)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (0,-y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0$, $\text{Ker}(f_2 - I) = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} =< (1,0) >$. $f_2 - I$ est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$.

     (b) $\text{Im}(f_2 - I) = \{(f_2 - I)(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_2 - I)(x,y) = (0,-y) = y(0,-1)$, $\text{Im}(f_2 - I) =< (0,-1) >$. $f_2 - I$ est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$.

     (c) On en déduit que $f_2 - I$ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_3 : (x,y) \mapsto (y,0)$.

  1. Soient $\vec{u} = (u_1,u_2), \vec{v} = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

  $$\begin{aligned} f_3(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f_3\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = f_3\begin{pmatrix}\lambda u_1 + \mu v_1\\ \lambda u_2 + \mu v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_2 + \mu v_2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_2\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu v_2\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix}u_2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_2\\0\end{pmatrix} = \lambda f_3(\vec{u}) + \mu f_3(\vec{v}) \end{aligned}$$

  donc f_3 est une application linéaire.

  2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_3 en un point de coordonnées $(y,0)$. Cela signifie que f_3 agit comme une projection orthogonale sur l'axe des ordonnées composée par une rotation de centre l'origine et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (ou une projection oblique sur l'axe des abscisses).

  3. (a) $\text{Ker}(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_3(x,y) = (0,0)\}$. Comme $f_3(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (y,0) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0$, $\text{Ker}(f_3) = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0), x \in \mathbb{R}\} =< (1,0) >$. f_3 est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

(b) $\text{Im}(f_3) = \{f_3(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $f_3(x,y) = (y,0) = y(1,0)$, $\text{Im}(f_3) = \{y(1,0), y \in \mathbb{R}\} = \ < (1,0) >$. f_3 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,0)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

(c) Comme f_3 n'est ni injectif ni surjectif, f_3 n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_3 - I) : (x,y) \mapsto (f_3 - I)(x,y) = f_3(x,y) - (x,y) = (y,0) - (x,y) = (y - x, -y) = -(x - y, y)$. $f_3 - I$ est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ $f_3 - I$ désigne une transvection (ou un cisaillement) composée par une symétrie par rapport à l'origine.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_3 - I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f_3 - I)(x,y) = (0,0)\}$. Comme $(f_3 - I)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (y - x, -y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_3 - I) = \vec{0}$. $f_3 - I$ est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_3 - I) = \{(f_3 - I)(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_3 - I)(x,y) = (y - x, -y) = y(1,-1) + x(-1,0)$, $\text{Im}(f_3 - I) =< (1,-1), (-1,0) >$. $f_3 - I$ est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) On en déduit que $f_3 - I$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_4 : (x,y) \mapsto (x + y, x - y)$.

1. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$f_4(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f_4\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = f_4\begin{pmatrix}\lambda u_1 + \mu v_1\\\lambda u_2 + \mu v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)\\(\lambda u_1 + \mu v_1) - (\lambda u_2 + \mu v_2)\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}\lambda u_1 + \lambda u_2\\\lambda u_1 - \lambda u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu v_1 + \mu v_2\\\mu v_1 - \mu v_2\end{pmatrix}$$
$$= \lambda\begin{pmatrix}u_1 + u_2\\u_1 - u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1 + v_2\\v_1 - v_2\end{pmatrix} = \lambda f_4(\vec{u}) + \mu f_4(\vec{v})$$

donc f_4 est une application linéaire.

2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_4 en un point de coordonnées $(x + y, x - y)$. Cela signifie que f_4 agit comme une similitude indirecte.

3. (a) $\text{Ker}(f_4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_4(x,y) = (0,0)\}$. Comme $f_4(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x + y, x - y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_4) = \{\vec{0}\}$. f_4 est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau est réduit au vecteur nul.

   (b) $\text{Im}(f_4) = \{f_4(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $f_4(x,y) = (x + y, x - y) = x(1,1) + y(1,-1)$, $\text{Im}(f_4) = \{x(1,1) + y(1,-1), x, y \in \mathbb{R}\}$. f_4 est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,1)$ et $(1,-1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_4 est un endomorphisme injectif et surjectif, f_4 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_4 - I) : (x,y) \mapsto (f_4 - I)(x,y) = f_4(x,y) - (x,y) = (x + y, x - y) - (x,y) = (y, x - 2y)$. $f_4 - I$ est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ $f_4 - I$ désigne une transvection composée par une symétrie par rapport à l'origine.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_4 - I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f_4 - I)(x,y) = (0,0)\}$. Comme $(f_4 - I)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (y, x - 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_4 - I) = \vec{0}$. $f_4 - I$ est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_4 - I) = \{(f_4 - I)(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_4 - I)(x,y) = (y, x - 2y) = y(1,-2) + x(0,1)$, $\text{Im}(f_3 - I) =< (1,-2), (0,1) >$. $f_4 - I$ est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) On en déduit que $f_4 - I$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_5 : (x,y) \mapsto (2x, 2y)$.

1. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$f_5(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f_5\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = f_5\begin{pmatrix}\lambda u_1 + \mu v_1\\\lambda u_2 + \mu v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(\lambda u_1 + \mu v_1)\\2(\lambda u_2 + \mu v_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda u_1\\2\lambda u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\mu v_1\\2\mu v_2\end{pmatrix}$$
$$= \lambda\begin{pmatrix}2u_1\\2u_2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2v_1\\2v_2\end{pmatrix} = \lambda f_5(\vec{u}) + \mu f_5(\vec{v})$$

donc f_5 est une application linéaire.

2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_5 en un point de coordonnées $(2x, 2y)$. Cela signifie que f_5 agit comme une homothétie de rapport 2.

3. (a) $\text{Ker}(f_5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_5(x,y) = (0,0)\}$. Comme $f_5(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $\text{Ker}(f_5) = \{\vec{0}\}$. f_5 est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_5) = \{f_5(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme $f_5(x,y) = (2x, 2y) = x(2,0) + y(0,2)$, $\text{Im}(f_5) = \ < (2,0), (0,2) >$. Comme ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im}(f_5) = \mathbb{R}^2$. f_5 est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_5 est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, f_5 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_5-I):(x,y)\mapsto(f_5-I)(x,y)=f_5(x,y)-(x,y)=(2x,2y)-(x,y)=(x,y)=I(x,y)$. f_5-I est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ f_5-I désigne l'identité.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_5-I)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(f_5-I)(x,y)=(0,0)\}$. Comme $(f_5-I)(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$, $\text{Ker}(f_5-I)=\{\vec{0}\}$. f_5-I est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_5-I)=\{(f_5-I)(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_5-I)(x,y)=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$, $\text{Im}(f_5-I)=<(1,0),(0,1)>$. Comme ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im}(f_5-I)=\mathbb{R}^2$. f_5-I est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_5-I est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, f_5-I est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_6:(x,y)\mapsto(x,x)$.

1. Soient $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a

$$f_6(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=f_6\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)=f_6\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\\lambda u_2+\mu v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\\lambda u_1+\mu v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu v_1\\\mu v_1\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_1\end{pmatrix}=\lambda f_6(\vec{u})+\mu f_6(\vec{v})$$

   donc f_6 est une application linéaire.

2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_6 en un point de coordonnées (x,x). Cela signifie que f_6 agit comme une projection (oblique) parallèlement à l'axe des ordonnées sur la première bissectrice.

3. (a) $\text{Ker}(f_6)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,f_6(x,y)=(0,0)\}$. Comme $f_6(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(x,x)=(0,0)\Leftrightarrow x=0$, $\text{Ker}(f_6)=\{(0,y),y\in\mathbb{R}\}$. f_6 est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_6)=\{f_6(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $f_6(x,y)=(x,x)=x(1,1)$, $\text{Im}(f_6)=\{x(1,1),x\in\mathbb{R}\}=<(1,1)>$. f_6 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,1)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_6 n'est ni injectif ni surjectif, f_6 n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_6-I):(x,y)\mapsto(f_6-I)(x,y)=f_6(x,y)-(x,y)=(x,x)-(x,y)=(0,x-y)$. f_6-I est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ f_6-I désigne une projection oblique sur l'axe des ordonnées.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_6-I)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(f_6-I)(x,y)=(0,0)\}$. Comme $(f_6-I)(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(0,x-y)=(0,0)$, $\text{Ker}(f_6-I)=\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}$. f_6-I est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

   (b) $\text{Im}(f_6-I)=\{(f_6-I)(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_6-I)(x,y)=(0,x-y)=x(0,1)+y(0,-1)$, $\text{Im}(f_6-I)=<(0,1),(0,-1)>=<(0,1)>$. f_6 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(0,1)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_6-I est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, f_6-I est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_7:(x,y)\mapsto(y,y)$.

1. Soient $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a

$$f_7(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=f_7\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)=f_7\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\\lambda u_2+\mu v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_2+\mu v_2\\\lambda u_2+\mu v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_2\\\lambda u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu v_2\\\mu v_2\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}u_2\\u_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_2\\v_2\end{pmatrix}=\lambda f_7(\vec{u})+\mu f_7(\vec{v})$$

   donc f_7 est une application linéaire.

2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_7 en un point de coordonnées (y,y). Cela signifie que f_7 agit comme une projection (oblique) parallèlement à l'axe des abscisses sur la première bissectrice.

3. (a) $\text{Ker}(f_7)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,f_7(x,y)=(0,0)\}$. Comme $f_7(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(y,y)=(0,0)\Leftrightarrow y=0$, $\text{Ker}(f_7)=\{(x,0),x\in\mathbb{R}\}$. f_7 est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\text{Im}(f_7)=\{f_7(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $f_7(x,y)=(y,y)=y(1,1)$, $\text{Im}(f_7)=\{y(1,1),y\in\mathbb{R}\}=<(1,1)>$. f_7 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,1)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_7 n'est ni injectif ni surjectif, f_7 n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_7-I):(x,y)\mapsto(f_7-I)(x,y)=f_7(x,y)-(x,y)=(y,y)-(x,y)=(y-x,0)$. f_7-I est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ f_7-I désigne une projection oblique sur l'axe des abscisses.

   $\tilde{3}$ (a) $\text{Ker}(f_7-I)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(f_7-I)(x,y)=(0,0)\}$. Comme $(f_7-I)(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(y-x,0)=(0,0)$, $\text{Ker}(f_7-I)=\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}$. f_7-I est donc un endomorphisme non injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

(b) $\mathrm{Im}(f_7-I)=\{(f_7-I)(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_7-I)(x,y)=(y-x,0)=x(-1,0)+y(1,0)$, $\mathrm{Im}(f_7-I)=<(-1,0),(1,0)>=<(1,0)>$. f_7 est donc un endomorphisme non surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,0)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

(c) Comme f_7-I est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, f_7-I est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $f_8:(x,y)\mapsto(x-y,x+y)$.

1. Soient $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a

$$f_8(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=f_8\left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)=f_8\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\\lambda u_2+\mu v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda u_1+\mu v_1)-(\lambda u_2+\mu v_2)\\(\lambda u_1+\mu v_1)+(\lambda u_2+\mu v_2)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda u_1-\lambda u_2\\\lambda u_1+\lambda u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu v_1-\mu v_2\\\mu v_1+\mu v_2\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}u_1-u_2\\u_1+u_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1-v_2\\v_1+v_2\end{pmatrix}=\lambda f_8(\vec{u})+\mu f_8(\vec{v})$$

donc f_8 est une application linéaire.

2. Un point de coordonnées (x,y) est transformé par f_8 en un point de coordonnées $(x-y,x+y)$. Cela signifie que f_8 agit comme une rotation elliptique d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. (a) $\mathrm{Ker}(f_8)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,f_8(x,y)=(0,0)\}$. Comme $f_8(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(x-y,x+y)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$, $\mathrm{Ker}(f_8)=\{\vec{0}\}$. f_8 est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$ car son noyau est réduit au vecteur nul.

   (b) $\mathrm{Im}(f_8)=\{f_8(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $f_8(x,y)=(x-y,x+y)=x(1,-1)+y(1,1)$, $\mathrm{Im}(f_8)=\{x(1,-1)+y(1,1),x,y\in\mathbb{R}\}$. f_8 est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$ car $(1,-1)$ et $(1,1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

   (c) Comme f_8 est un endomorphisme injectif et surjectif, f_8 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

4. On a $(f_8-I):(x,y)\mapsto(f_8-I)(x,y)=f_8(x,y)-(x,y)=(x-y,x+y)-(x,y)=(-y,x)$. f_8-I est encore une application linéaire.

   $\tilde{2}$ f_8-I désigne une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

   $\tilde{3}$ (a) $\mathrm{Ker}(f_8-I)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(f_8-I)(x,y)=(0,0)\}$. Comme $(f_8-I)(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(-y,x)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$, $\mathrm{Ker}(f_8-I)=\vec{0}$. f_8-I est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\mathrm{Im}(f_8-I)=\{(f_8-I)(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $(f_8-I)(x,y)=(-y,x)=y(-1,0)+x(0,1)$, $\mathrm{Im}(f_8-I)=<(-1,0),(0,1)>$. f_8-I est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$.

   (c) On en déduit que f_8-I est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 69

1. $f(x,y,z)=(2x-y,y-z)=(0,0)\Leftrightarrow(2x-y,y-z)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2x-y&=&0\\y-z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}y&=&2x\\z&=&2x\end{array}\right.$ donc $\mathrm{Ker}(f)=\{(x,2x,2x),x\in\mathbb{R}\}=<(1,2,2)>$. Comme le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective.
$f(x,y,z)=(2x-y,y-z)=x(2,0)+y(-1,1)+z(0,-1)$ donc $\mathrm{Im}(f)=<(2,0),(-1,1),(0,-1)>=$ $<(2,0),(0,-1)>$. Comme $(2,0)$ et $(0,-1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est surjective.

2. $g(x,y)=(x+y,x-y,2x+3y)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\x-y&=&0\\2x+3y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&0\end{array}\right.$. On en déduit que g est injective.
$g(x,y)=(x+y,x-y,2x+3y)=x(1,1,2)+y(1,-1,3)$ donc $\mathrm{Im}(g)=<(1,1,2),(1,-1,3)>$. Comme $\dim(\mathrm{Im}(g))=2\neq\dim(\mathbb{R}^3)$, l'application g n'est pas surjective.

3. $g\circ f(x,y,z)=g(f(x,y,z))=g(\underbrace{2x-y}_{X},\underbrace{y-z}_{Y})=(X+Y,X-Y,2X+3Y)=((2x-y)+(y-z),(2x-y)-(y-z),2(2x-y)+3(y-z))=(2x-z,2x-2y+z,4x+y-3z)$.
$g\circ f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2x-z&=&0\\2x-2y+z&=&0\\4x+y-3z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&-2&1\\4&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Comme $C=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&-2&1\\4&1&-3\end{pmatrix}$ est singulière ($\det(C)=0$), cela signifie que $g\circ f$ n'est pas injective.
On déduit également à l'aide cette propriété que $g\circ f$ n'est pas surjective (les 3 vecteurs colonnes de C n'étant pas linéairement indépendants, ils ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^3$).

4. $f\circ g(x,y)=f(g(x,y))=f(\underbrace{x+y}_{X},\underbrace{x-y}_{Y},\underbrace{2x+3y}_{Z})=(2X-Y,Y-Z)=(2(x+y)-(x-y),(x-y)-(2x+3y))=(x+3y,-x-4y)$.

$f\circ g(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (x+3y,-x-4y)=(0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 0\\ -x-4y &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Comme $D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ est inversible ($\det(D)=-1\neq 0$), cela implique que $f\circ g$ est injective.
On déduit également à l'aide cette propriété que $f\circ g$ est surjective.

Remarque 0.1

- La composée de deux injections est une injection et, inversement, si pour une certaine fonction g, $g\circ f$ est une injection, alors f est une injection.
- La composée de deux surjections est une surjection et, inversement, si $g\circ f$ est une surjection, alors g est une surjection.
- La composée de deux bijections est une bijection mais inversement, si la composée de deux applications est une bijection, on peut seulement en déduire que l'une est une injection et l'autre une surjection.

Exercice 70

- Soit $f_1 : (x,y)\mapsto f_1(x,y)=(-x,-y)$.
  1. On a $f_1(1,0)=(-1,0)=\boxed{-1}(1,0)+\boxed{0}(0,1)$ et $f_1(0,1)=(0,-1)=\boxed{0}(1,0)+\boxed{-1}(0,1)$ donc
  $$A_1=\begin{array}{cc} f_1(1,0) & f_1(0,1) \end{array}\qquad A_1=\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\boxed{-1} & \boxed{0}\\ \boxed{0} & \boxed{-1}\end{pmatrix}\begin{array}{c}(1,0)\\ (0,1)\end{array}\end{array}.$$
  2. On a $f_1(0,1)=(0,-1)=\boxed{-1}(0,1)+\boxed{0}(1,0)$ et $f_1(1,0)=(-1,0)=\boxed{0}(0,1)+\boxed{-1}(1,0)$ donc
  $$A_2=\begin{array}{cc|c} f_1(0,1) & f_1(1,0) & \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & (0,1)\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & (1,0)\end{array}.$$
  3. On a $f_1(0,2)=(0,-2)=\boxed{-1}(0,2)+\boxed{0}(-3,0)$ et $f_1(-3,0)=(3,0)=\boxed{0}(0,2)+\boxed{-1}(-3,0)$ donc
  $$A_3=\begin{array}{cc|c} f_1(0,2) & f_1(-3,0) & \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & (0,2)\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & (-3,0)\end{array}.$$
  4. On a $f_1(0,1)=(0,-1)=\boxed{-1}(0,1)+\boxed{0}(1,1)$ et $f_1(1,1)=(-1,-1)=\boxed{0}(0,1)+\boxed{-1}(1,1)$ donc
  $$A_4=\begin{array}{cc|c} f_1(0,1) & f_1(1,1) & \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & (0,1)\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & (1,1)\end{array}.$$
  5. On a $f_1(1,1)=(-1,-1)=\boxed{-1}(1,1)+\boxed{0}(1,-1)$ et $f_1(1,-1)=(-1,1)=\boxed{0}(1,1)+\boxed{-1}(1,-1)$ donc
  $$A_5=\begin{array}{cc|c} f_1(1,1) & f_1(1,-1) & \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & (1,1)\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & (1,-1)\end{array}.$$
- Soit $f_2 : (x,y)\mapsto f_1(x,y)=(x,0)$.
  1. On a $f_2(1,0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)$ et $f_2(0,1)=(0,0)=0(1,0)+0(0,1)$ donc
  $$A_1=\begin{array}{cc|c} f_2(1,0) & f_2(0,1) & \\ 1 & 0 & (1,0)\\ 0 & 0 & (0,1)\end{array}.$$
  2. On a $f_2(0,1)=(0,0)=0(0,1)+0(1,0)$ et $f_2(1,0)=(1,0)=0(0,1)+1(1,0)$ donc
  $$A_2=\begin{array}{cc|c} f_2(0,1) & f_2(1,0) & \\ 0 & 0 & (0,1)\\ 0 & 1 & (1,0)\end{array}.$$
  3. On a $f_2(0,2)=(0,0)=0(0,2)+0(-3,0)$ et $f_2(-3,0)=(-3,0)=0(0,2)+1(-3,0)$ donc

$$A_3 = \begin{array}{cc} f_2(0,2) & f_2(-3,0) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,2) \\ (-3,0) \end{array} \end{array}.$$

4. On a $f_2(0,1) = (0,0) = 0(0,1) + 0(1,1)$ et $f_2(1,1) = (1,0) = -1(0,1) + 1(1,1)$ donc
$$A_4 = \begin{array}{cc} f_2(0,1) & f_2(1,1) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,1) \end{array} \end{array}.$$

5. On a $f_2(1,1) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$ et $f_2(1,-1) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$ donc
$$A_5 = \begin{array}{cc} f_2(1,1) & f_2(1,-1) \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array} \end{array}.$$

- Soit $f_3 : (x,y) \mapsto f_3(x,y) = (y,0)$.
  1. On a $f_3(1,0) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$ et $f_3(0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$ donc
$$A_1 = \begin{array}{cc} f_3(1,0) & f_3(0,1) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} \end{array}.$$

  2. On a $f_3(0,1) = (1,0) = 0(0,1) + 1(1,0)$ et $f_3(1,0) = (0,0) = 0(0,1) + 0(1,0)$ donc
$$A_2 = \begin{array}{cc} f_3(0,1) & f_3(1,0) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,0) \end{array} \end{array}.$$

  3. On a $f_3(0,2) = (2,0) = 0(0,2) - \frac{2}{3}(-3,0)$ et $f_3(-3,0) = (0,0) = 0(0,2) + 0(-3,0)$ donc
$$A_3 = \begin{array}{cc} f_3(0,2) & f_3(-3,0) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,2) \\ (-3,0) \end{array} \end{array}.$$

  4. On a $f_3(0,1) = (1,0) = -1(0,1) + 1(1,1)$ et $f_3(1,1) = (1,0) = -1(0,1) + 1(1,1)$ donc
$$A_4 = \begin{array}{cc} f_3(0,1) & f_3(1,1) \\ \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,1) \end{array} \end{array}.$$

  5. On a $f_3(1,1) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$ et $f_3(1,-1) = (-1,0) = -\frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$ donc
$$A_5 = \begin{array}{cc} f_3(1,1) & f_3(1,-1) \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array} \end{array}.$$

- Soit $f_4 : (x,y) \mapsto f_4(x,y) = (x+y, x-y)$.
  1. On a $f_4(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $f_4(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$ donc
$$A_1 = \begin{array}{cc} f_4(1,0) & f_4(0,1) \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} \end{array}.$$

  2. On a $f_4(0,1) = (1,-1) = 1(0,1) - 1(1,0)$ et $f_4(1,0) = (1,1) = 1(0,1) + 1(1,0)$ donc
$$A_2 = \begin{array}{cc} f_4(0,1) & f_4(1,0) \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,0) \end{array} \end{array}.$$

  3. On a $f_4(0,2) = (2,-2) = -1(0,2) - \frac{2}{3}(-3,0)$ et $f_4(-3,0) = (-3,-3) = -\frac{3}{2}(0,2) + 1(-3,0)$ donc
$$A_3 = \begin{array}{cc} f_4(0,2) & f_4(-3,0) \\ \left(\begin{array}{cc} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (0,2) \\ (-3,0) \end{array} \end{array}.$$

4. On a $f_4(0,1) = (1,-1) = -2(0,1) + 1(1,1)$ et $f_4(1,1) = (2,0) = -2(0,1) + 2(1,1)$ donc
$$A_4 = \begin{array}{cc} f_4(0,1) & f_4(1,1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,1) \end{array} .$$

5. On a $f_4(1,1) = (2,0) = 1(1,1) + 1(1,-1)$ et $f_4(1,-1) = (0,2) = 1(1,1) - 1(1,-1)$ donc
$$A_5 = \begin{array}{cc} f_4(1,1) & f_4(1,-1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array} .$$

- Soit $f_5 : (x,y) \mapsto f_5(x,y) = (2x, 2y)$.
  1. On a $f_5(1,0) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1)$ et $f_5(0,1) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1)$ donc
$$A_1 = \begin{array}{cc} f_5(1,0) & f_5(0,1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} .$$

  2. On a $f_5(0,1) = (0,2) = 2(0,1) + 0(1,0)$ et $f_5(1,0) = (2,0) = 0(0,1) + 2(1,0)$ donc
$$A_2 = \begin{array}{cc} f_5(0,1) & f_5(1,0) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,0) \end{array} .$$

  3. On a $f_5(0,2) = (0,4) = 2(0,2) + 0(-3,0)$ et $f_5(-3,0) = (-6,0) = 0(0,2) + 2(-3,0)$ donc
$$A_3 = \begin{array}{cc} f_5(0,2) & f_5(-3,0) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,2) \\ (-3,0) \end{array} .$$

  4. On a $f_5(0,1) = (0,2) = 2(0,1) + 0(1,1)$ et $f_5(1,1) = (2,2) = 0(0,1) + 2(1,1)$ donc
$$A_4 = \begin{array}{cc} f_5(0,1) & f_5(1,1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,1) \end{array} .$$

  5. On a $f_5(1,1) = (2,2) = 2(1,1) + 0(1,-1)$ et $f_5(1,-1) = (2,-2) = 0(1,1) + 2(1,-1)$ donc
$$A_5 = \begin{array}{cc} f_5(1,1) & f_5(1,-1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,-1) \end{array} .$$

- Soit $f_6 : (x,y) \mapsto f_6(x,y) = (x, x)$.
  1. On a $f_6(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $f_6(0,1) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$ donc
$$A_1 = \begin{array}{cc} f_6(1,0) & f_6(0,1) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} .$$

  2. On a $f_6(0,1) = (0,0) = 0(0,1) + 0(1,0)$ et $f_6(1,0) = (1,1) = 1(0,1) + 1(1,0)$ donc
$$A_2 = \begin{array}{cc} f_6(0,1) & f_6(1,0) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,1) \\ (1,0) \end{array} .$$

  3. On a $f_6(0,2) = (0,0) = 0(0,2) + 0(-3,0)$ et $f_6(-3,0) = (-3,-3) = -\frac{3}{2}(0,2) + 1(-3,0)$ donc
$$A_3 = \begin{array}{cc} f_6(0,2) & f_6(-3,0) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} (0,2) \\ (-3,0) \end{array} .$$

  4. On a $f_6(0,1) = (0,0) = 0(0,1) + 0(1,1)$ et $f_6(1,1) = (1,1) = 0(0,1) + 1(1,1)$ donc

$$A_4 = \begin{array}{cc} f_6(0,1) & f_6(1,1) \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c}(0,1)\\(1,1)\end{array} \end{array}.$$

5. On a $f_6(1,1) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,-1)$ et $f_6(1,-1) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,-1)$ donc

$$A_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_6(1,1) & f_6(1,-1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}(1,1)\\(1,-1)\end{array} \end{array}.$$

- Soit $f_7 : (x,y) \mapsto f_7(x,y) = (y,y)$.

1. On a $f_7(1,0) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$ et $f_7(0,1) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ donc

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_7(1,0) & f_7(0,1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(1,0)\\(0,1)\end{array} \end{array}.$$

2. On a $f_7(0,1) = (1,1) = 1(0,1) + 1(1,0)$ et $f_7(1,0) = (0,0) = 0(0,1) + 0(1,0)$ donc

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_7(0,1) & f_7(1,0) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,1)\\(1,0)\end{array} \end{array}.$$

3. On a $f_7(0,2) = (2,2) = 1(0,2) - \frac{2}{3}(-3,0)$ et $f_7(-3,0) = (0,0) = 0(0,2) + 0(-3,0)$ donc

$$A_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_7(0,2) & f_7(-3,0) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,2)\\(-3,0)\end{array} \end{array}.$$

4. On a $f_7(0,1) = (1,1) = 0(0,1) + 1(1,1)$ et $f_7(1,1) = (1,1) = 0(0,1) + 1(1,1)$ donc

$$A_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_7(0,1) & f_7(1,1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,1)\\(1,1)\end{array} \end{array}.$$

5. On a $f_7(1,1) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,-1)$ et $f_7(1,-1) = (-1,-1) = -1(1,1) + 0(1,-1)$ donc

$$A_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_7(1,1) & f_7(1,-1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}(1,1)\\(1,-1)\end{array} \end{array}.$$

- Soit $f_8 : (x,y) \mapsto f_8(x,y) = (x-y, x+y)$.

1. On a $f_8(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $f_8(0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1)$ donc

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_8(1,0) & f_8(0,1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(1,0)\\(0,1)\end{array} \end{array}.$$

2. On a $f_8(0,1) = (-1,1) = 1(0,1) - 1(1,0)$ et $f_8(1,0) = (1,1) = 1(0,1) + 1(1,0)$ donc

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_8(0,1) & f_8(1,0) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,1)\\(1,0)\end{array} \end{array}.$$

3. On a $f_8(0,2) = (-2,2) = 1(0,2) + \frac{2}{3}(-3,0)$ et $f_8(-3,0) = (-3,-3) = -\frac{3}{2}(0,2) + 1(-3,0)$ donc

$$A_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_8(0,2) & f_8(-3,0) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,2)\\(-3,0)\end{array} \end{array}.$$

4. On a $f_8(0,1) = (-1,1) = 2(0,1) - 1(1,1)$ et $f_8(1,1) = (0,2) = 2(0,1) + 0(1,1)$ donc

$$A_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_8(0,1) & f_8(1,1) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}(0,1)\\(1,1)\end{array} \end{array}.$$

5. On a $f_8(1,1)=(0,2)=1(1,1)-1(1,-1)$ et $f_8(1,-1)=(2,0)=1(1,1)+1(1,-1)$ donc

$$A_5 = \begin{array}{cc} f_8(1,1) & f_8(1,-1) \\ \end{array}$$
$$A_5=\begin{array}{c} \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c}(1,1)\\(1,-1)\end{array}.$$

Exercice 71

1. • $M_{f_1}=\begin{array}{c} f_1(1,0) \quad f_1(0,1) \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array}.$

• Comme $\mathrm{Im}(f_1)=\{f_1(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ et $f_1(x,y)=x(1,1,2)+y(1,-1,0)$, $\mathrm{Im}(f_1)=<(1,1,2),(1,-1,0)>$ et une base de $\mathrm{Im}(f_1)$ est donc donnée par $((1,1,2),(1,-1,0))$.

• Comme $\mathrm{Ker}(f_1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f_1(x,y)=(0,0,0)\}$ et $f_1(x,y)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x+y&=&0\\ x-y&=&0\\ 2x&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ y&=&0\end{array}\right.$, il n'y a pas de base pour $\mathrm{Ker}(f_1)$. On aurait pu déduire ce dernier résultat grâce au théorème du rang qui précise que $\dim(\mathrm{Im}(f_1))+\dim(\mathrm{Ker}(f_1))=\dim(\mathbb{R}^2)$ et donc que $\dim(\mathrm{Ker}(f_1))=0$.

2. • $M_{f_2}=\begin{array}{c} f_2(1,0,0) \quad f_2(0,1,0) \quad f_2(0,0,1) \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array}.$

• Comme $\mathrm{Im}(f_2)=\{f_2(x,y,z),(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$ et $f_2(x,y,z)=x(0,0,-1)+y(0,1,0)+z(0,-1,1)$, $\mathrm{Im}(f_2)=$ $<(0,0,-1),(0,1,0),(0,-1,1)>=<(0,0,-1),(0,1,0)>$ et une base de $\mathrm{Im}(f_2)$ est donc donnée par la famille $((0,0,-1),(0,1,0))$.

• Comme $\mathrm{Ker}(f_2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f_2(x,y,z)=(0,0,0)\}$ et $f_2(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 0&=&0\\ y-z&=&0\\ -x+z&=&0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=z\\ y=z\\ z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$, on a $\mathrm{Ker}(f_2)=\{(z,z,z)=z(1,1,1),z\in\mathbb{R}\}$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_2)$ est donnée par $((1,1,1))$.

3. • $M_{f_3}=\begin{array}{c} f_3(1,0,0) \quad f_3(0,1,0) \quad f_3(0,0,1) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array}.$

• Comme $\mathrm{Im}(f_3)=\{f_3(x,y,z),(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$ et $f_3(x,y,z)=x(1,0,-1)+y(-1,1,0)+z(0,-1,1)$, $\mathrm{Im}(f_3)=$ $<(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)>=<(1,0,-1),(-1,1,0)>$ et une base de $\mathrm{Im}(f_3)$ est donc donnée par $((1,0,-1),(-1,1,0))$.

• Comme $\mathrm{Ker}(f_3)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f_3(x,y,z)=0\}$ et $f_3(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x-y&=&0\\ y-z&=&0\\ z-x&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} x=z\\ y=z\\ z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$, on a $\mathrm{Ker}(f_3)=\{(z,z,z)=z(1,1,1),z\in\mathbb{R}\}$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_3)$ est donnée par $((1,1,1))$.

4. • $M_{f_4}=\begin{array}{c} f_4(1,0,0,0) \quad f_4(0,1,0,0) \quad f_4(0,0,1,0) \quad f_4(0,0,0,1) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}(1,0)\\(0,1)\end{array}.$

• Comme $\mathrm{Im}(f_4)=\{f_4(x,y,z,t),(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\}$ et $f_4(x,y,z,t)=x(1,2)+y(1,1)+z(2,1)+t(-1,1)$, $\mathrm{Im}(f_4)=<(1,2),(1,1),(2,1),(-1,1)>=<(1,2),(1,1)>$ et une base de de $\mathrm{Im}(f_4)$ est donc donnée par la famille $((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1))$.

• Comme $\mathrm{Ker}(f_4)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, f_4(x,y,z)=0\}$ et $f_4(x,y,z)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t&=&0\\ 2x+y+z+t&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcl} x-z+2t&=&0\\ 2x+y+z+t&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=z-2t\\ y=-3z+3t\\ t,z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$, $\mathrm{Ker}(f_4)=\{(z-2t,-3z+3t,z,t)=z(1,-3,1,0)+t(-2,3,0,1),z,t\in\mathbb{R}\}$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_4)$ est donnée par $((1,-3,1,0),(-2,3,0,1))$.

5. • $M_{f_5} = \begin{array}{cccc} f_5(1,0,0,0) & f_5(0,1,0,0) & f_5(0,0,1,0) & f_5(0,0,0,1) \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & \quad -1 & \quad 2 & \quad 3 \end{pmatrix}} \end{array}$.

   • Comme $\mathrm{Im}(f_5) = \{f_5(x,y,z,t), (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\}$ et $f_5(x,y,z,t) = x(1)+y(-1)+z(2)+t(3)$, $\mathrm{Im}(f_5) =< 1 >$ et une base de de $\mathrm{Im}(f_5)$ est donc donnée par la famille (1).
   • Comme $\mathrm{Ker}(f_5) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, f_5(x,y,z,t) = 0\}$ et $f_5(x,y,z,t) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 3t = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z - 3t$, $\mathrm{Ker}(f_5) = \{(y-2z-3t, y, z, t) = y(2,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + t(-3,0,0,1), y,z,t \in \mathbb{R}\}$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_5)$ est donnée par $((2,1,0,0),(-2,0,1,0),(-3,0,0,1))$.

Exercice 72

1. Comme $\dim(\mathcal{B}') = 3$, il suffit de démontrer que $\mathcal{B}'$ est une famille libre ou génératrice pour prouver que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition, $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$.

3. Pour déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, il faut exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de u, v, w. On a relativement rapidement

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1,0,0) = \frac{2}{3}(1,0,1) - \frac{2}{3}(0,1,1) + \frac{1}{3}(1,2,0) = \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}w \\ e_2 = (0,1,0) = -\frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,1) + \frac{1}{3}(1,2,0) = -\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w \\ e_3 = (0,0,1) = \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(0,1,1) - \frac{1}{3}(1,2,0) = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}w \end{array} \right.$$

ce qui implique que $Q = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$.

4. Comme $PQ = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$, on en déduit que $P = Q^{-1}$.

Exercice 73

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 & = & 1 & (L_1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 6x_4 & = & 1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 & = & 2 & (L_3) \leftarrow (L_3) + 3(L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 & = & 1 & (L_1) \\ -x_2 - 4x_3 + 4x_4 & = & -1 & (L_2) \\ 5x_2 + 22x_3 - 22x_4 & = & 5 & (L_3) \leftarrow (L_3) + 5(L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 & = & 1 & (L_1) \leftarrow 2(L_1) - 7(L_3) \\ -x_2 - 4x_3 + 4x_4 & = & -1 & (L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_3) \\ 2x_3 - 2x_4 & = & 0 & (L_3) \leftarrow \frac{1}{2}(L_3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 2x_1 + 6x_2 + 4x_4 & = & 2 & (L_1) \leftarrow (L_1) + 6(L_2) \\ -x_2 & = & -1 & (L_2) \leftarrow (-1)L_2 \\ x_3 - x_4 & = & 0 & (L_3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 2x_1 + 4x_4 & = & -4 & (L_1) \leftarrow \frac{1}{2}(L_1) \\ x_2 & = & 1 & (L_2) \\ x_3 & = & x_4 & (L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & -2 - 2x_4 & (L_1) \\ x_2 & = & 1 & (L_2) \\ x_3 & = & x_4 & (L_3) \end{array} \right.$$

Finalement, le système admet une infinité de solutions de la forme $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2 - 2x_4, 1, x_4, x_4) = (-2, 1, 0, 0) + x_4(-2, 0, 1, 1)$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_3, v_4)$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & 10 & -6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(\mathcal{B}_1) = 3$, $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(B_1) \neq 0$. On a $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & 10 & -6 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$ donc la famille $\mathcal{B}_1$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(\mathcal{B}_2) = 3$, $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(B_2) \neq 0$. On a $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Pour exprimer v_4 dans la base $\mathcal{B}_2$ (noté alors $\tilde{v_4}$), il suffit d'invoquer la matrice de passage B_2 et la formule qui permet d'exprimer un vecteur d'une base dans une autre base soit

$$v_4 = B_2\tilde{v_4} \Leftrightarrow \tilde{v_4} = B_2^{-1}v_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -45 & 31 & 5 \\ 32 & -22 & -4 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $v_4 = 2v_1 + 0v_2 - 1v_3$.

Exercice 74

1. En utilisant la définition des vecteurs de la base canonique,

$$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_1 - e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim(\mathcal{B}') = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(v_1\ v_2\ v_3) \neq 0$. On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition, la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

3. On obtient par la méthode des cofacteurs $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice correspond à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 75

1. On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ (donc une base de $\mathbb{R}^4$) si et seulement si $\det(B) \neq 0$. On a $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est libre et génératrice.
2. Par définition, la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est donnée par B.
3. Toujours par définition, si $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ traduit le vecteur (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 & 16 \\ -16 & 16 & -20 & -4 \\ 6 & 3 & 3 & -12 \\ 2 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Exercice 76

1. On a par définition $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \end{array}$.

2. La matrice de changement de base P' de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{T}$ s'obtient en inversant P. Ainsi, $P' = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad i & \quad j & \quad k \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$.

3. $P' = P^{-1}$.

Exercice 77

1. Par définition, $P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} (1,-2) & (2,-5) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \quad 2 \\ -2 & \quad -5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \end{array}$.

2. On remarque rapidement que $e_1 = 5(1,-2) - 2(2,-5)$ et $e_2 = 2(1,-2) - (2,-5))$ donc $Q = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1,-2) \\ (2,-5) \end{matrix} \end{array}$.

3. Comme $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que$P = Q^{-1}$ ou que $Q = P^{-1}$.

4. $P^{-1}AP = QAP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{pmatrix}$.