LICENCE 3 - Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

AAN Lundi 05 Mars 2012 - Contrôle Continu 1, Semestre 2

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 La courbe des puissances classées d'un service d'électricité représente la proportion de l'année où la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné. Plus la puissance est grande, plus petite est la proportion de l'année où la demande dépasse cette valeur. Cette courbe est donc par définition décroissante.
Pour une année donnée, on dispose des données et de la table de différences divisées suivantes :

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}]$
0	0,0	30,0			
			-10,0		
1	0,1	29,0		-200,0	
			-50,0		566,667
2	0,2	24,0		83,33	
			-16,67		-87,30
3	0,5	19,0		22,22	
			-3,33		-91,27
4	0,8	18,0		-41,67	
			-20,0		-1316,67
5	0,9	16,0		-700,0	
			-160,0		
6	1,0	0,0			

1. Donnez une approximation de $f(0,3)$ à l'aide du polynôme d'interpolation de Newton de degré 3 passant par les 4 premiers points. Est-ce que cette approximation vous semble acceptable ? Justifiez votre réponse.
2. Donnez une approximation de l'erreur d'interpolation commise à la question 1. et indiquez les chiffres significatifs de l'approximation de $f(0,3)$ obtenue à la question 1..
3. Donnez les expressions des polynômes de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ et $L_3(x)$ de degré 3 qui permettent de calculer une approximation de $f(0,3)$. Cette approximation doit être la plus précise possible. (On ne calculera pas cette approximation).

Correction :

1. De la table de différences divisées on déduit :
$$p_3(x) = 30 - 10x - 200x(x - 0,1) + 566,667x(x - 0,1)(x - 0,2),$$
ce qui donne $p_3(0,3) = 18,4$. La valeur de $f(0,3)$ n'est pas acceptable car pour cette valeur la fonction n'est plus décroissante.
2. On peut estimer la valeur de l'erreur par $E_3(x) \simeq a_4 x(x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,5)$ où $a_4 = \dfrac{-87,30 - 566,667}{0,8 - 0} = -817,4603$. Cette erreur prend la valeur $0,9810$ en $x = 0,3$.
L'approximation $p_3(0,3) = 18,4$ possède 1 chiffre significatif.
3. Il faut choisir les abscisses les plus proches de $x = 0,3$ à savoir $x_0 = 0,2$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,1$ et $x_1 = 0,0$. Les polynômes de Lagrange sont
$$L_0(x) = \frac{(x - 0,5)(x - 0,1)x}{0,2 - 0,5)(0,2 - 0,1)0,2},\ L_1(x) = \frac{(x - 0,2)(x - 0,1)x}{(0,5 - 0,2)(0,5 - 0,1)0,5}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - 0,2)(x - 0,5)x}{(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,5)0,1} \text{ et } L_3(x) = \frac{(x - 0,2)(x - 0,5)(x - 0,1)}{(0,0 - 0,2)(0,0 - 0,5)(0,0 - 0,1)}.$$

Exercice 2 On rappelle la définition suivante :

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel réel. On dit qu'une application

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto (x|y) \end{array}$$

est un produit scalaire si elle est :
- bilinéaire : φ est linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixé).
- symétrique : $\forall (x,y)\in\mathbf{E}^2 \quad (y|x)=(x|y)$
- positive : $\forall x\in\mathbf{E} \quad (x|x)\geqslant 0$
- définie : $(x|x)=0\Rightarrow x=0$,

1. Montrez que l'application $(P,Q)\mapsto < P|Q >= \displaystyle\int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire (pour $< .|. >$) sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donnez une base orthonormée (pour $< .|. >$) de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction :

1. La fonction $t\mapsto 2-t$ étant à valeurs strictement positives sur $]0;2[$, il est facile de vérifier que $< .|. >$ est un produit scalaire.
2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, on définit la base orthonormée $(P_i)_{0\leq i\leq 2}$ par :

$$\begin{cases} Q_0=1,\ \|Q_0\|^2=\displaystyle\int_0^2(2-t)dt=2,\ P_0=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ Q_1=x-<x|P_0>P_0=x-\dfrac{2}{3}, \\ \|Q_1\|^2=<Q_1|x>=\dfrac{4}{9},\ P_1=\dfrac{3}{2}x-1, \\ Q_2=x^2-<x^2|P_0>P_0-<x^2|P_1>P_1=x^2-\dfrac{8}{5}x+\dfrac{2}{5}, \\ \|Q_2\|^2=<Q_2|x^2>=\dfrac{8}{75},\ P_2=\dfrac{\sqrt{6}}{4}(5x^2-8x+2). \end{cases}$$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}x-1,\frac{\sqrt{6}}{4}(5x^2-8x+2)\right).$$

Exercice 3 On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel. On pourra confondre les expressions "polynôme" et "fonction polynomiale".
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[-1;1]}|f(x)|$.

On rappelle les résultats suivants :

L'unique polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

est le polynôme de Tchebychev d'indice n est noté T_n. On peut définir alors une fonction polynomiale sur $[-1;1]$ par

$$\forall x \in [-1;1],\ T_n(x) = \cos(n\mathrm{arcos}(x)).$$

Le polynôme T_n vérifie les propriétés suivantes :
– $\forall x \in [-1;1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_n(x)$
– $\forall x \in [-1;1]$, $T_n(x) = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
– Si on pose $c_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).$$

Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.

1. Montrez que pour toute fonction h de E, l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1;1[$.

   Pour f et g éléments de E, on pose $< f|g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

2. (a) Soit h une fonction positive de E, montrez que si $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0$ alors h est la fonction nulle.
   (b) Montrez que $< .|. >$ définit un produit scalaire sur E.
   Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E. Pour tout élément h de E, on pose $\|h\|_2 = \sqrt{< h|h >}$.

3. Calculez $< T_n|T_m >$ selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale (pour $< .|. >$) de E_n.

   Dans toute la suite, f désignera un élément de E et n un entier naturel. On pose

   $$d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\}.$$

4. (a) Énoncez un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$.
   (b) Exprimez $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev (qui, on le rappelle, forment une base orthogonale - mais pas orthonormée - de E_n).
   On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

5. Montrez que $d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f|T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}}$. (On utilisera le théorème de Pythagore.)

6. (a) Déduisez-en que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{< f|T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente.
   (b) Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ lorsque n tend vers $+\infty$? (On considérera la condition nécessaire de convergence de la série précédente.)

7. (a) Soit h un élément de E, montrez que $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|h\|_\infty$.
   (b) Montrez en utilisant un théorème de Weierstrass que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$.

8. (a) Déduisez-en que $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{< f|T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}}$.

(b) Application : un théorème des moments.
Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n,

$$\int_{-1}^{1} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0\,?$$

Soit $f \in E$. On note $d_\infty(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$.

On dit qu'un élément P de E_n est un polynôme de meilleure approximation (PMA) au sens de Tchebychev de f d'ordre n s'il vérifie une des deux conditions équivalentes :

(i) $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$

(ii) $\forall Q \in E_n$, $\|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$.

On pose $K = \{Q \in E_n, \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$. On admettra que K est une partie compacte non vide de E_n.

9. (a) Montrez que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$
   (b) Déduisez-en qu'il existe un élément P de E_n tel que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$.
   P est donc un PMA d'ordre n de f.

(On a prouvé l'existence d'un PMA d'ordre n pour f.)

Soit h un élément de E. On dit que h équioscille sur $k+1$ points s'il existe $k+1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ de l'intervalle $[-1; 1]$ tels que

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, k\},\ |h(x_i)| = \|h\|_\infty \text{ et } \forall i \in \{0, 1, \ldots, k-1\},\ h(x_{i+1}) = -h(x_i).$$

(on dit que les extréma sont alternés)

10. Exemples.
   (a) Dessinez le graphe d'une fonction Φ de E telle que $\|\Phi\|_\infty = \dfrac{1}{2}$ et Φ équioscille sur 4 points.
   (On ne cherchera pas à expliciter une telle fonction.)
   (b) Montrez que le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n+1$ équioscille sur $n+2$ points.
11. Le but de cette question est de montrer le résultat suivant :

Si P est un élément de E_n tel que $f - P$ équioscille sur $n+2$ points alors P est un PMA d'ordre n de f.

Soit P un élément de E_n tel que $f - P$ équioscille sur $n+2$ points que l'on note $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$.
Soit Q un élément de E_n tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.
   (a) Soit $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$. Montrez que si $f(x_i) - P(x_i) > 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) > 0$.
   On a de même que si $f(x_i) - P(x_i) < 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) < 0$.
   (b) Déduisez-en que $P = Q$ et concluez.
12. On considère dans cette question, pour $x \in [-1; 1]$, $f(x) = x^{n+1}$ et on pose :

$$q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x).$$

Montrez que q_n est un PMA d'ordre n de f.
13. Déduisez-en que pour tout polynôme P unitaire de degré $n+1$, on a $2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.
14. (a) Dans cette question, f est un polynôme de degré $n+1$. Déterminez un PMA d'ordre n de f.
   (b) Application : déterminez un PMA d'ordre 2 de $f(x) = 5x^3 + 2x - 3$.

Il n'existe pas de formule générale qui donne l'expression du PMA d'une fonction quelconque. On peut cependant utiliser un algorithme (de Remez) qui fournit une suite de polynômes qui converge vers le PMA (cf. Master 1 MEM...).

<u>*Correction*</u> :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1;1[$ car elle est positive et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \text{Arcsin}b - \text{Arcsin}a \leq \pi$ pour tout $[a;b] \subset]-1;1[$. $\left|\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \dfrac{\|h\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}$ donc $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est aussi intégrable sur $]-1;1[$.
2. (a) Par positivité stricte de l'intégrale pour les fonctions continues, h est nulle sur $]-1;1[$. Par continuité en -1 et en 1, h est nulle sur $[-1;1]$.

   (b) L'application $< .|. >$ est bien définie sur $E \times E$ d'après 1., elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et évidemment symétrique et positive. Plus précisément, elle est définie positive d'après (a), c'est donc un produit scalaire sur E.
3. La définition de $< .|. >$ et le changement de variable $t = \cos\theta$ donnent :
$$< T_n|T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta.$$
D'où $< T_n|T_m >= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad m = n = 0 \\ \pi/2 & \text{si} \quad m = n \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases}$

   $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls de l'e.v. E_n, qui est de dimension $n+1$. C'est par conséquent une base orthogonale de E_n.
4. (a) E_n est un sous-e.v. de dimension finie de l'espace préhilbertien $\big(E, < .|. >\big)$ donc, par le théorème de projection, la distance de f à E_n est atteinte en un unique élément de E_n, à savoir le projeté orthogonal de f sur E_n.

   (b) La famille $\left(\dfrac{T_k}{\|T_k\|_2}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormale de E_n donc, d'après le cours et les questions 3. et 4.(a) :
$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle \frac{T_k}{\|T_k\|_2}, f \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \frac{1}{\pi}\left(< T_0, f > T_0 + 2\sum_{k=1}^{n} < T_k, f > T_k\right).$$
5. $f = t_n(f) + (f - t_n(t))$ et $t_n(f) \perp f - t_n(f)$ donc $\|f\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + \|f - t_n(f)\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + d_2(f, E_n)^2$.
Mais d'après 4.(b) et l'expression de la norme en base orthonormale, $\|t_n(f)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}$ d'où le résultat.
6. (a) $\displaystyle\sum \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont, selon 5., majorées par $\|f\|_2^2$. Elle est donc convergente.

   (b) La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente. Son terme général tend donc vers zéro. Or pour $k > 0$, on a $< T_k, T_k >= \frac{\pi}{2}$ (question 3.), donc par produit, la suite de terme général $< f, T_k >^2$ converge vers zéro donc celle de terme général $< f, T_k >$ aussi. Ainsi, la suite de terme général $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ tend vers zéro.
7. (a) $\|h\|_2^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \|h\|_\infty^2 \left[\text{Arcsin}t\right]_{-1}^{1} = \pi\|h\|_\infty^2$, d'où le résultat.

   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme p tel que $\|f - p\|_\infty \leq \dfrac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}$ d'où il résulte, d'après (a), que $\|f - p\|_2 \leq \epsilon$.
   Fixons un tel p et notons N son degré. Pour $n \geq N$, p appartient à E_n, donc $\|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \leq \epsilon$.
   Cela démontre, par retour à la définition, que la suite $(\|f - t_n(f)\|_2)$ converge vers 0, ou encore que la suite $\big(t_n(f)\big)$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_2$.

8. (a) Il suffit de faire tendre n vers l'infini dans l'égalité du 5., puisque $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2$.
   (b) Pour une telle fonction h, le (a) donne $\|h\|_2 = 0$ c'est-à-dire $h = 0$.
9. (a) – $K \subset E_n$, donc $d_\infty(f, E_n) \leq d_\infty(f, K)$.
   – Pour $Q \in E_n \setminus K$, $\|f - Q\|_\infty > \|f\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$. On a donc $\|f - Q\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$ pour tout $Q \in E_n$, et par suite $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$.
   (b) L'application $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ de K dans $\mathbb{R}$ est continue. Comme K est compact et non vide, elle admet un minimum global. Soit P un élément de K en lequel ce minimum est atteint, on a :

$$\|f - P\|_\infty = \min_{Q \in K} \|f - Q\|_\infty = \inf_{Q \in K} \|f - Q\|_\infty = d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).$$

10. (a) D'après les rappels, $\Phi = T_3/2$ a pour norme $\|\Phi\|_\infty = 1/2$ et équioscille sur les 4 points $x_l = \cos(l\pi/3)$ avec l variant de 0 à 3.
   (b) On a établi cette propriété en TD (qui est rappelée dans l'énoncé). Les points recherchés sont les $x_k = \cos \dfrac{(n+1-k)\pi}{n+1}$ avec $k \in \{0, \ldots, n+1\}$.
11. (a) $Q(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + \|f - P\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty - \|f - Q\|_\infty > 0$.
   (b) Les inégalités du (a) et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que le polynôme $Q - P$ possède au moins $n + 1$ racines. Comme son degré est au plus n, c'est le polynôme nul, donc $Q = P$. Cela contredit l'hypothèse initiale sur Q. On a donc $\|f - Q\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty$ pour tout $Q \in E_n$. Autrement dit, P est un PMA d'ordre n de f.
12. – D'abord, q_n appartient à E_n, puisque T_{n+1} est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant 2^n.
   – Ensuite, $f(x) - q_n(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$ donc, selon 10.(b), $f - q_n$ équioscille sur $n + 2$ points.
   – D'après le rappel de la question 11., q_n est un PMA d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto x^{n+1}$.
13. Soit P un tel polynôme. Gardons les notations précédentes et posons $r_n(x) = x^{n+1} - P(x)$. $r_n \in E_n$ donc d'après 10., $\|f - q_n\|_\infty \leq \|f - r_n\|_\infty$ ce qui se réécrit $2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.
14. (a) Notons α le coefficient dominant de f et posons $P = f - 2^{-n}\alpha T_{n+1}$. Par construction, P appartient à E_n. De plus, $f - P = 2^{-n}\alpha T_{n+1}$, qui équioscille sur $n + 2$ points, donc P est un PMA d'ordre n de f.
   (b) L'application à f de la formule du (a) fournit le PMA d'ordre 2

$$x \mapsto 5x^3 + 2x - 3 - \frac{5}{4}(4x^3 - 3x) = \frac{23}{4}x - 3.$$