

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction :*

$$1. \det M(t) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \frac{m_{1,2}}{t} & \frac{m_{1,3}}{t^2} & \dots & \frac{m_{1,n}}{t^{n-1}} \\ tm_{2,1} & m_{2,2} & \frac{m_{2,3}}{t} & \dots & \frac{m_{2,n}}{t^{n-2}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-2}m_{n,2} & \dots & tm_{n,n-1} & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t} \times \dots \times \frac{1}{t^{n-1}} \det(C_1, tC_2, \dots, t^{n-1}C_n)$$

$$= \frac{1}{t} \times \dots \times \frac{1}{t^{n-1}} \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \dots & m_{1,n} \\ tm_{2,1} & tm_{2,2} & tm_{2,3} & \dots & tm_{2,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-1}m_{n,2} & \dots & t^{n-1}m_{n,n-1} & t^{n-1}m_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t} \times \dots \times \frac{1}{t^{n-1}} \det \begin{pmatrix} L_1 \\ tL_2 \\ \vdots \\ t^{n-1}L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det(M).$$

$$2. \text{ On pose } A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & (0) \\ b_2 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & b_n & a_n \end{pmatrix}. \text{ On a } M = F + \lambda^2(D + E) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & c_1 & (0) \\ \lambda^2 b_2 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & \lambda^2 b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M(1/\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & \lambda c_1 & (0) \\ \lambda b_2 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \lambda c_{n-1} \\ (0) & & \lambda b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix} = \lambda(E + F) + \lambda^2 D.$$

$$\begin{aligned} 3. P_G(\lambda^2) &= \det(-(D + E)^{-1}F - \lambda^2 I) = (-1)^n \det((D + E)^{-1}) \det(F + \lambda^2(D + E)) \\ &= (-1)^n \det(M) \det((D + E)^{-1}) = (-1)^n \det(M(1/\lambda)) \det((D + E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \det(\lambda(E + F) + \lambda^2 D) \times \det((D + E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \lambda^n \det((E + F) + \lambda D) \times \det((D + E)^{-1}) \\ &= \lambda^n \det(D) \det(-D^{-1}(E + F) - \lambda I) \times \det((D + E)^{-1}) = \lambda^n \det(J - \lambda I) \end{aligned}$$

$$\text{car } \det((D + E)^{-1}) = \frac{1}{\det(D + E)} = \frac{1}{\det D} = \frac{1}{\prod_k a_{kk}}. \text{ Ainsi, } P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda).$$

λ est valeur propre de J équivaut à λ^2 est valeur propre de G et $sp(G) = \{\lambda^2; \lambda \in sp(J)\}$ et $\rho(G) = (\rho(J))^2$.

On a donc, comme ρ est positif, $\rho(G) < 1$ si et seulement si $\rho(J) < 1$ et dans ce cas, les deux méthodes sont convergentes ou bien aucune des deux ne converge.

Exercice 2 *Correction :*

1. La formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$, cela implique les égalités :

$$\int_{-1}^1 1dt = 2 = A_0 + A_1$$

$$\int_{-1}^1 tdt = 0 = A_0 t_0 + A_1 t_1$$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2$$

$$\int_{-1}^1 t^3 dt = 0 = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3$$

On résout donc le système de 4 équations à 4 inconnues suivant

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 t_0 + A_1 t_1 = 0 \\ A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 - A_0 \\ 2t_1 + A_0(t_0 - t_1) = 0 \\ 2t_1^2 + A_0(t_0^2 - t_1^2) = \frac{2}{3} \\ 2t_1^3 + A_0(t_0^3 - t_1^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 - A_0 \\ A_0(t_0 - t_1) = -2t_1 \\ 2t_1^2 - 2t_1(t_0 + t_1) = \frac{2}{3} \\ 2t_1^3 - 2t_1(t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 - A_0 \\ A_0(t_0 - t_1) = -2t_1 \\ 2t_0 t_1 = \frac{2}{3} \\ 2t_0 t_1(t_0 - t_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 - A_0 \\ A_0(t_0 - t_1) = -2t_1 \\ 2t_0 t_1 = \frac{2}{3} \\ t_0 = t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \\ t_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Il nous reste à déterminer K . On pose $g(t) = t^4$ dans la formule (Q) mise à jour et on obtient :

$$\int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 24K \Leftrightarrow 24K = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \Leftrightarrow K = \frac{1}{135}.$$

Finalement,

$$(Q) \quad \int_{-1}^1 g(t) dt = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{135} g^{(4)}(\tau).$$

2. On cherche la fonction affine h vérifiant

$$\begin{cases} h(x_i) = ax_i + b = -1 \\ h(x_{i+1}) = ax_{i+1} + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \\ b = -\frac{x_{i+1} + x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}.$$

Finalement,

$$h(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (2x - (x_{i+1} + x_i)).$$

On considère l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$. On réalise le changement de variable $x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ et on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) dt.$$

Comme les points du support sont équidistants, $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ et on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) dt.$$

3. La formule composite associée à (Q) est donnée par

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) dt \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^4 \frac{1}{135} f^{(4)}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \tau + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right] + \\ &\quad \frac{h^4}{4320} (b - a) f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[. \end{aligned}$$

Exercice 3 *Correction :*

1. Pour $k = 1, \dots, n$ $a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_i$ avec $r_{ik} = q_i^T a_k$ par orthonormalité des q_i .
2. Découle immédiatement de la question précédente.
3. Algorithme de Gram-Schmidt :

Pour $k = 1, \dots, n$ faire

$$r_{ik} = q_i^T a_k \quad \text{pour } i = 1, \dots, k-1$$

$$z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i$$

$$r_{kk} = (z_k^T z_k)^{1/2}$$

$$q_k = z_k / r_{kk}$$

4. (a)

$$\sum_{i=k}^n q_i r_i^T = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & \cdots & r_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{k+1,k+1} & \cdots & r_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)} e_k = z = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{kk} q_k \Rightarrow r_{kk} = \|z\|_2, q_k = z / r_{kk}$$

- (b)

$$q_k^T A^{(k)} = [q_k^T z, q_k^T B] = [1, 0, \dots, 0] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = r_k^T$$

et donc

$$[r_{k,k+1}, \dots, r_{kn}] = q_k^T B$$

- (c)

$$[0, \dots, 0, A^{(k+1)}] = \sum_{i=k+1}^n q_i r_i^T = [0, \dots, 0, A^{(k)}] - q_k r_k^T = [0, \dots, 0, A^{(k)} - q_k(r_{kk}, \dots, r_{kn})]$$

$$[0, \dots, 0, z - q_k r_{kk}, B - q_k(r_{k,k+1}, \dots, r_{kn})] \Rightarrow A^{(k+1)} = B - q_k(r_{k,k+1}, \dots, r_{kn})$$

- (d) Données : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = n$

On calcule la factorisation $A = Q_1 R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangulaire supérieure. Le calcul de Q_1 se fait sur place.

Pour $k = 1, \dots, n$

$$r_{kk} = (\sum_{i=1}^m a_{ik}^2)^{1/2}$$

pour $i = 1, \dots, m$

$$a_{ik} \leftarrow a_{ik} / r_{kk}$$

pour $j = k+1, \dots, n$

$$r_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij}$$

pour $i = 1, \dots, m$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} r_{kj}$$

- (e) complexité : mn^2 flops.