LICENCE 3 - Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

AAN Lundi 07 Mai 2012 - Contrôle Continu 2, Semestre 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Soit A une matrice tridiagonale de taille $n \geq 3$ dont les termes diagonaux sont non nuls. Soit D la matrice diagonale de A, E (resp. F) la matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte de A. On a donc $A = D + E + F$; on pose $J = -D^{-1}(E + F)$ et $G = -(D + E)^{-1}F$.

1. Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit, pour tout réel non nul t, la matrice
$$M(t) = (m_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}, \text{ avec } m_{ij}(t) = t^{i-j}m_{ij} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n.$$
Montrer alors que :
$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^{\star},\ \det(M(t)) = \det(M).$$
2. On pose $M = F + \lambda^2(D + E)$. En utilisant les notations de la question 1., écrire la matrice $M(1/\lambda)$ en fonction de D, E, F et λ.
3. Montrer que si P_J est le polynôme caractéristique de J et P_G celui de G, alors on a $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$. En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$ et conclure.

Exercice 2

1. Donner A_0, A_1, x_0, x_1 et K dans la formule de quadrature :
$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t)dt = A_0 g(t_0) + A_1 g(t_1) + K g^{(4)}(\tau),\ \tau \in]-1; 1[$$
en supposant que g soit de classe $\mathcal{C}^4([-1; 1])$.
Soit $[a; b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = \dfrac{b-a}{N}$ et $f \in \mathcal{C}^4[a; b]$.
2. Effectuer un changement de variable pour ramener $[x_i; x_{i+1}]$ à $[-1; 1]$ et appliquer la formule (Q) à l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.
3. En déduire la formule composite associée à (Q) pour approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 3 *Algorithme de Gram–Schmidt et Gram–Schmidt modifié*
Étant donnés n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m$, $\{a_1, \cdots, a_n\}$, on veut calculer une base orthonormale pour $\text{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$.
On pose $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et on considère la factorisation QR de A,
$$A = QR, \quad Q = [q_1, \cdots, q_n], \quad r_i^T, i = 1, \cdots, n \text{ les lignes de } R$$

1. Montrer que
$$\text{Im}A = \text{span}\{q_1, \cdots, q_n\}.$$
2. Montrer que
$$q_k = \frac{1}{r_{kk}} \left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i \right) \quad k = 1, \cdots, n$$
3. En déduire un algorithme pour le calcul récursif des q_i (algorithme de Gram–Schmidt).

4. Algorithme de Gram–Schmidt modifié
L'algorithme précédent est instable numériquement dû à la perte d'orthogonalité dans le calcul des q_i. On va reformuler l'algorithme pour le rendre stable.
Pour $k = 1, \cdots, n-1$, on définit $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-k+1)}$ de la façon suivante :

$$[0, A^{(k)}] = A - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_i^T = \sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T$$

et on va décrire l'étape k de l'algorithme.

(a) Montrer que si on pose

$$A^{(k)} = [z, B], \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)}$$

alors

$$r_{kk} = \|z\|_2, \quad q_k = z/r_{kk}.$$

(b) Comment peut–on calculer la ligne k de R à partir de $A^{(k)}$?

(c) Calculer $A^{(k+1)}$.

(d) À partir des questions précédentes, décrire l'algorithme qui permet le calcul de la factorisation $A = Q_1R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ orthonormale, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire supérieure (Gram–Schmidt modifié). Le calcul de Q_1 doit se faire sur place.

(e) Quelle est la complexité de l'algorithme précédent ?