Université du Littoral, Côte d'Opale
Licence de Mathématiques
Unité : Analyse et Algorithmique Numériques

Examen Mai 2011

Tout document est interdit.
Seule la calculatrice de l'université est autorisée.
Le problème est à rédiger sur des copies à part.

Exercice 1 Soit B une matrice carrée telle que $\|B\| < 1$ où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée.

1. Montrer que $I + B$ est inversible et que $\|(I+B)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|B\|}$ sans calculer l'inverse de $I + B$.
2. Montrer que les séries matricielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B^k$ convergent.
3. Donner l'inverse de $I + B$.

Exercice 2 *Modèle de Lorentz.*

On considère le modèle de Lorentz suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'_A & = & -\sigma y_A + \sigma y_B \\ y'_B & = & -y_A y_C + r y_A - y_B \\ y'_C & = & y_A y_B - b y_C \end{array}\right.$$

avec $y_A(0) = -8$, $y_B(0) = 8$ et $y_C(0) = r - 1$, puis $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = \dfrac{8}{3}$.

1. Justifier que ce système admet une solution unique locale en temps.
2. Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce schéma.

Problème On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ des polynômes de degré $\leq n$. On considère le produit scalaire et sa norme associée

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad ||P|| = \sqrt{\langle P|Q\rangle},$$

définis sur $\mathcal{P}$. Soit les trois suites de fonctions $(U_n)_{n\geq 0}$, $(P_n)_{n\geq 0}$ et $(Q_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

- $U_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1, U_n(x) = \dfrac{x^n(x-1)^n}{n!}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P_n(x) = U_n^{(n)}(x)$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad Q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} dt.$

1. Montrer que P_n est un polynôme de degé n à coefficients rationnels et donner son coefficient de plus haut degré en fonction de n.
2. Vérifier que :
$$\begin{array}{llcl} (R1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, & U'_{n+1}(x) & = & (2x-1)U_n(x), \\ (R2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, & U''_{n+1}(x) & = & 2(2n+1)U_n(x) + U_{n-1}(x). \end{array}$$
3. En utilisant les relations $(R1)$ et $(R2)$ et la formule de Leibnitz, montrer que la suite $(P_n)_n$ satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :
$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1.$$

4. Montrer que la suite $(Q_n)_n$ satisfait la même relation de récurrence à trois termes.
5. En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour tout polynôme Q de degré $\leq n-1$, on a $\int_0^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$. Que peut-on dire de la suite des polynômes $(P_n)_n$?
6. En déduire que P_n admet n racines réelles distinctes $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ dans l'intervalle $]0, 1[$.
7. On pose $I_n = \int_0^1 U_n(x)dx$. En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $||P_n||^2 = (-1)^n I_n$. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, donner I_n en fonction de n puis en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $||P_n||^2 = \dfrac{1}{2n+1}$.

   On considère la formule de quadrature de Gauss :

$$(G_n) \qquad \int_0^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_{i,n} f(x_{i,n}) + E_n(f),$$

   exacte sur l'espace des polynômes de degré $\leq 2n-1$. On désigne par $L_{i,n}$ le polynôme de Lagrange associé au point $x_{i,n}$
8. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{P_n'(x_{i,n})(x - x_{i,n})}$ peut se prolonger par continuité en $L_{i,n}$.
9. Montrer que pour $i = 1, \dots, n$, on a $A_{i,n} = \dfrac{Q_n(x_{i,n})}{P_n'(x_{i,n})}$.

   Le but du reste de ce problème est d'utiliser la formule de quadrature (G_n) pour construire une suite rationnelle qui converge rapidement vers $\ln(2)$. Pour cela, on choisit f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

   On a $\ln(2) = \int_0^1 f(x)dx$. On pose $v_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{A_{i,n}}{2 - x_{i,n}} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,n} f(x_{i,n})$. On alors $\ln(2) - v_n = E_n(f)$.
10. Montrer que v_n est un nombre rationnel. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule de Lagrange pour montrer que $\forall n \geq 1, \quad v_n = \dfrac{Q_n(2)}{P_n(2)}$.

    Soit $r_n = Q_{n+1}(2)P_n(2) - Q_n(2)P_{n+1}(2)$
11. Donner r_n en fonction de r_{n-1} puis calculer r_n en fonction de n. (ind : utiliser les relations à trois termes).
12. En déduire que $\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$.
13. Montrer que $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n(2)} \int_0^1 \dfrac{P_n(x)}{2-x} dx$, puis que $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \dfrac{P_n^2(x)}{2-x} dx$.
14. Montrer que pour tout entier n, on a $P_n(2) \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$ et en déduire que

$$0 \leq \ln 2 - v_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{4^{2n}} \quad .$$

15. Application numérique : Dresser un tableau, donnant pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, v_n sous forme irréductible, sous forme décimale approchée ainsi qu'un majorant de $\ln 2 - v_n$.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, U_n est un polynôme à coefficients rationnels de degré $2n$. Il est clair que $P_n = U_n^{(n)}$ est un polynôme à coefficients rationnels de degré n. Son monôme du plus haut degré est :
$$\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}x^n = \frac{(2n)!}{n!n!}x^n = C_{2n}^n x^n.$$
2. Relations évidentes.
3. En dérivant n fois la relation $(R1)$ et $(n-1)$ fois la relation $(R2)$, on obtient les relations :
$(R1')\quad P_{n+1}(x) = (2x-1)P_n(x) + 2nU_n^{(n-1)}(x)$
$(R2')\quad P_{n+1}(x) = 2(2n+1)U_n^{(n-1)}(x) + P_{n-1}(x)$
En considérant $(2n+1)(R1') - n(R2')$, on obtient la relation de récurrence à 3 termes.
4. Le polynôme (en x) : $Q(x) = P(x) - P(t)$ a t comme racine donc il est divisible par $x-t$ et il vient que Q_n est un polynôme de degré $n-1$ défini sur $\mathbb{R}$. En utilisant la définition de Q_n et la relation de récurrence, on montre que les polynôme Q_n vérifient la même relation de récurrence.
5. Soit $n \geq 1$ et Q un polynôme de $\mathcal{P}_{n-1}$ on a $\displaystyle\int_0^1 Q(t)P_n(t)\,dt = \int_0^1 Q(t)U_n^{(n)}(t)\,dt$. En intégrant cette dernière intégrale par parties, on obtient
$\displaystyle\int_0^1 Q(t)P_n(t)\,dt = \Big[Q(t)U_n^{(n-1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 Q'(t)U_n^{(n-1)}(t)\,dt = -\int_0^1 Q'(t)U_n^{(n-1)}(t)\,dt.$
D'où, par induction, en intégrant par parties encore $n-1$ fois, on obtient :
$$\int_0^1 Q(t)P_n(t)\,dt = (-1)^n\int_0^1 Q^{(n)}(t)U_n(t)\,dt = 0,$$
car $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$, $Q^{(n)}(t) = 0$. On a ainsi la relation
$$(3)\qquad \int_0^1 Q(t)P_n(t)\,dt = 0.$$
La suite $(P_n)_n$ est une suite de polynômes orthogonaux.
6. Théorème du cours (ou alors utliser le théorème de Rolle répété).
7. En intégrant la relation $(R2)$ entre 0 et 1, on obtient : $2(2n+1)I_n + I_{n-1} = \Big[U'_{n+1}\Big]_0^1 = 0$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $I_n = -\dfrac{1}{2(2n+1)}I_{n-1}$. Par récurrence on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n(2n+1)(2n-1)\cdots 3.1}I_0$.
Qu'on peut mettre sous la forme $I_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$, car $I_0 = 1$.
Pour tout entier n, on a $||P_n||^2 = \displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,dt = \int_0^1 P_n(t)\,U_n^{(n)}(t)\,dt$. En intégrant n fois par parties, on obtient : $||P_n||^2 = (-1)^n\displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}(t)\,U_n(t)\,dt$. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n^{(n)}(t) = n!C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!}$. D'où
$||P_n||^2 = (-1)^n n! C_{2n}^n I_n = \dfrac{(2n)!}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi $||P_n|| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
8. Pour tout $x \neq x_{i,n}$, on a $L_{i,n}(x) = \dfrac{P_n(x)}{P'_n(x_{i,n})(x-x_{i,n})}$. De plus
$$\lim_{x\to x_{i,n}}\frac{P_n(x)}{P'_n(x_{i,n})(x-x_{i,n})} = \frac{1}{P'_n(x_{i,n})} \times \lim_{x\to x_{i,n}}\frac{P_n(x)-P_n(x_{i,n})}{x-x_{i,n}} = \frac{P'_n(x_{i,n})}{P'_n(x_{i,n})} = 1 = L_{i,n}(x_{i,n}).$$

9. Dans la formule de Gauss (G_n), on a les coefficients $A_{i,n}$ sont donnés par la formule

$$A_{i,n} = \int_0^1 L_{i,n}(x)dx = \int_0^1 \frac{P_n(x)}{P_n'(x_{i,n})(x - x_{i,n})}dx = \frac{Q_n(x_{i,n})}{P_n'(x_{i,n})}.$$

10. Q_n est un polynôme de degré n. D'après la formule de Lagrange :

$$Q_n(2) = \sum_{i=1}^{n} Q_n(x_{i,n})L_{i,n}(2) = \sum_{i=1}^{n} Q_n(x_{i,n})\frac{P_n(2)}{P_n'(x_{i,n})(2 - x_{i,n})}.$$

Par suite

$$\frac{Q_n(2)}{P_n(2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_n(x_{i,n})}{P_n'(x_{i,n})}\frac{1}{(2 - x_{i,n})} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,n}f(x_{i,n}) = v_n.$$

11. D'après les relations de récurrence à 3 termes, on a

$$Q_{n+1}(2)P_n(2) = \frac{3(2n+1)}{n+1}Q_n(2)P_n(2) - \frac{n}{n+1}Q_{n-1}(2)P_n(2),$$

et

$$Q_n(2)P_{n+1}(2) = \frac{3(2n+1)}{n+1}Q_n(2)P_n(2) - \frac{n}{n+1}Q_n(2)P_{n-1}(2).$$

Par soustraction membre à membre, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $r_n = \dfrac{n}{n+1}r_{n-1}$.

D'où $r_n = \dfrac{n}{n+1}.\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.r_0 = \dfrac{1}{n+1}r_0$. Or

$$r_0 = Q_1(2)P_0(2) - Q_0(2)P_1(2) = 2.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{2}{n+1}.$$

12. On en déduit que : $\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = \dfrac{Q_{n+1}(2)}{P_{n+1}(2)} - \dfrac{Q_n(2)}{P_n(2)} = \dfrac{r_n}{P_{n+1}(2)P_n(2)}$. Finalement,

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$.

13. $\forall n \geq 1$, on a $\ln 2 - v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-t} - \frac{Q_n(2)}{P_n(2)}$, donc $\ln 2 - v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-t} - \frac{1}{P_n(2)}\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2}dt$,

ce qui donne $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n(2)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}\,dt$.

Soit $Q(t) = \dfrac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2}$, c'est un polynôme de $\mathcal{P}_{n-1}$, alors d'après (3), on a

$\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2}P_n(t)dt = 0$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}\,dt = \frac{1}{P_n(2)}\int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t}\,dt$. En tenant compte de la question précédente, on a le résultat $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n^2(2)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t}\,dt$.

14. On a bien $P_1(2) \geq \dfrac{4^1}{2\times 1+1}$. On suppose que l'inégalité $P_k(2) \geq \dfrac{4^k}{2k+1}$ est vraie pour $k = 1, \dots, n$. Montrons que cette inégalité est vraie pour $k = n+1$. On utilise pour cela la relation à 3 termes. On

$$(n+1)P_{n+1}(2) = 3(2n+1)P_n(2) - nP_{n-1}(2) \geq 3(2n+1)P_n(2) \geq 3(2n+1)\frac{4^n}{2n+1}.$$

Ce qui prouve que

$$P_{n+1}(2) \geq 3\frac{4^n}{n+1} \geq \frac{4^{n+1}}{2(n+1)+1}.$$

Par récurrence, on a bien $P_n(2) \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$. Pour tout t de $[0,1]$, $1 \geq \dfrac{1}{2-t} \geq 0$, donc $0 \leq \ln 2 - v_n \leq \dfrac{1}{P_n^2(2)} \displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,dt = \dfrac{1}{(2n+1)P_n^2(2)}$. On obtient

$$0 \leq \ln 2 - v_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{4^{2n}}.$$

15. On peut écrire un programme donnant $v_n = \dfrac{Q_n(2)}{P_n(2)}$ ainsi que l'erreur donnée par la question 4.

n	$Q_n(2)$	$P_n(2)$	v_n	Erreur
1	2.00000	3.00000	0.66666666666666662960	$3.7e-2$
2	9.00000	13.00000	0.69230769230769229060	$1.2e-3$
3	43.66667	63.00000	0.69312169312169313880	$3.6e-5$
4	222.50000	321.00000	0.69314641744548288740	$1.1e-6$
5	1166.56667	1683.00000	0.69314715785304026320	$3.2e-8$
6	6230.70000	8989.00000	0.69314717988652807540	$9.5e-10$
7	33713.98571	48639.00000	0.69314718054001356320	$2.8e-11$
8	184189.30714	265729.00000	0.69314718055935620180	$8.3e-13$
9	1013771.41984	1462563.00000	0.69314718055992796680	$2.5e-14$