Université du Littoral, Côte d'Opale
Licence de Mathématiques
Unité : Analyse et Algorithmique Numériques

Examen Mai 2011

```
Tout document est interdit.
Seule la calculatrice de l'université est autorisée.
Le problème est à rédiger sur des copies à part.
```

Exercice 1 Soit B une matrice carrée telle que $\|B\| < 1$ où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée.

1. Montrer que $I + B$ est inversible et que $\|(I+B)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|B\|}$ sans calculer l'inverse de $I + B$.
2. Montrer que les séries matricielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B^k$ convergent.
3. Donner l'inverse de $I + B$.

Exercice 2 *Modèle de Lorentz.*
On considère le modèle de Lorentz suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'_A &=& -\sigma y_A + \sigma y_B \\ y'_B &=& -y_A y_C + r y_A - y_B \\ y'_C &=& y_A y_B - b y_C \end{array}\right.$$

avec $y_A(0) = -8$, $y_B(0) = 8$ et $y_C(0) = r - 1$, puis $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = \dfrac{8}{3}$.

1. Justifier que ce système admet une solution unique locale en temps.
2. Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce modèle.

Problème

Partie I

On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ des polynômes de degré $\leq n$. On considère le produit scalaire et sa norme associée

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad ||P|| = \sqrt{\langle P|Q\rangle},$$

définis sur $\mathcal{P}$. Soit les trois suites de fonctions $(U_n)_{n\geq 0}$, $(P_n)_{n\geq 0}$ et $(Q_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

- $U_0(x) = 1$ et $\forall n \geq 1, U_n(x) = \dfrac{x^n(x-1)^n}{n!}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P_n(x) = U_n^{(n)}(x)$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad Q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} dt$.

1. Montrer que P_n est un polynôme de degé n à coefficients rationnels et donner son coefficient de plus haut degré en fonction de n.
2. Montrer que :

$$\begin{array}{llrcl} (R1) & \forall n \in \mathbb{N}, & U'_{n+1}(x) &=& (2x-1)U_n(x), \\ (R2) & \forall n \in \mathbb{N}^\star, & U''_{n+1}(x) &=& 2(2n+1)U_n(x) + U_{n-1}(x). \end{array}$$

3. En utilisant les relations $(R1)$ et $(R2)$ et la formule de Leibnitz, montrer que la suite $(P_n)_n$ satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1.$$

4. Montrer que la suite $(Q_n)_n$ satisfait la même relation de récurrence à trois termes.
5. En utilisant des intégrations par parties successives, montrer que pour tout polynôme Q de degré $\leq n-1$, on a $\displaystyle\int_0^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$.
6. Que peut-on dire de la suite des polynômes $(P_n)_n$? En déduire que P_n admet n racines réelles distinctes $x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ dans l'intervalle $]0,1[$.
7. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 U_n(x)dx$. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, donner I_n en fonction de n. En utilisant des intégrations par parties successives, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $||P_n||^2 = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}(t)\, U_n(t)\, dt$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $||P_n||^2 = \dfrac{1}{2n+1}$.

   On considère la formule de quadrature de Gauss :

$$(G_n) \qquad \int_0^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_{i,n} f(x_{i,n}) + E_n(f),$$

   exacte sur l'espace des polynômes de degré $\leq 2n-1$. On désigne par $L_{i,n}$ le polynôme de Lagrange associé au point $x_{i,n}$

8. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{P_n'(x_{i,n})(x - x_{i,n})}$ peut se prolonger par continuité en $L_{i,n}$.
9. Montrer que pour $i = 1, \ldots, n$, on a $A_{i,n} = \dfrac{Q_n(x_{i,n})}{P_n'(x_{i,n})}$.

Partie II

Le but de cette partie du problème est d'utiliser la formule de quadrature (G_n) pour construire une suite rationnelle qui converge rapidement vers $\ln(2)$. Pour cela, on choisit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

On a $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_{i,n}}{2 - x_{i,n}} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,n} f(x_{i,n})$. On alors $\ln(2) - v_n = E_n(f)$.

10. Montrer que v_n est un nombre rationnel. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule de Lagrange pour montrer que $\forall n \geq 1, \quad v_n = \dfrac{Q_n(2)}{P_n(2)}$.

    Soit $r_n = Q_{n+1}(2)P_n(2) - Q_n(2)P_{n+1}(2)$

11. Donner r_n en fonction de r_{n-1} puis calculer r_n en fonction de n. (ind : utiliser les relations à trois termes).
12. En déduire que $\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$.
13. Montrer que $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n(2)} \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{2-x}\, dx$, puis que $\ln 2 - v_n = \dfrac{1}{P_n^2(2)} \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n^2(x)}{2-x}\, dx$.
14. Montrer que pour tout entier n, on a $P_n(2) \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$ et en déduire que

$$0 \leq \ln 2 - v_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{4^{2n}} \quad .$$

15. Application numérique : Dresser un tableau, donnant pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, v_n sous forme irréductible, sous forme décimale approchée ainsi qu'un majorant de $\ln 2 - v_n$.