Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 1 - Interpolation polynomiale.

Exercice 1 *Correction* :

1. (a) P étant un polynôme, il est indéfiniment dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $P(1) = 0$, $P'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x - 2$ et $P'(1) = 0$, $P''(x) = 12x^2 - 24x + 10$ et $P''(1) = -2$. D'après la formule de Taylor, on peut donc affirmer que la multiplicité de la racine 1 est égale à 2. On en déduit que $P(x) = (x-1)^2(ax^2 + bx + c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (b) Par division euclidienne (ou par identification), on trouve $P(x) = x(x-2)(x-1)^2$. On en déduit que P admet comme racines simples 0 et 2 et comme racine double 1.

   (c) $P(x) = x(x-2)(x-1)^2$.

2. (a) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x) = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$: $\alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + (x-2)\beta + (x-1)^2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma x^2 + (\beta - 2\gamma)x + (3\alpha - 2\beta + \gamma) = 0$. Ensuite, on démontre facilement par identification que $\gamma = \beta - 2\gamma = 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\mathcal{B} = \{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ est donc libre (il n'existe aucune combinaison linéaire entre $P_0(x), P_1(x)$ et $P_2(x)$). Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre et $dim(\mathcal{B}) = dim(\mathbb{R}_2[x])$, on sait que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, à l'instar de la base canonique $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2\}$.

   (b) On cherche à exprimer $1, x, x^2$ à l'aide de $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$. Une méthode consiste à donner la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et la base canonique $\mathcal{B}_c$. On sait que $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, chaque colonne de cette matrice exprimant les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ (par exemple, la dernière colonne s'obtient en remarquant que $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (1)1 + (-2)x + (1)x^2$). Pour obtenir la base qui nous intéresse, il faut déterminer l'inverse de cette matrice :

$$P(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que $1 = \frac{1}{3}P_0(x)$, $x = P_1(x) + \frac{2}{3}P_0(x)$, $x^2 = P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$.

Exercice 2 *Correction* :

La base de Newton utilisée ici est $\{1, (t-2), (t-2)(t-3)\}$.

1. $P_0(t) = f(t_0) = 1$.
2. $P_1(t) = c_0 + c_1(t - t_0)$, on écrit que $P_1(t_0) = f(t_0)$ et $P_1(t_1) = f(t_1)$, on obtient les coefficients $c_0 = 1$ et $c_1 = 2$, donc $P_1(t) = 1 + 2(t-1)$.
3. On a $P_2(t) = c'_0 + c'_1(t - t_0) + c'_2(t - t_0)(t - t_1)$, on écrit que $P_2(t_0) = f(t_0)$, $P_2(t_1) = f(t_1)$ et $P_2(t_2) = f(t_2)$, on obtient les coefficients $c'_0 = 1$, $c'_1 = 2$ et $c'_2 = -\frac{1}{2}$, donc
$$P_2(t) = 1 + 2(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)(t-2).$$

On remarque bien, comme indiqué dans le paragraphe de cours, que les polynômes sont emboîtés et que pour chaque nouveau polynôme il suffit de calculer un seul coefficient.

Exercice 3 *Correction* :

1. On inverse le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ où a_0, a_1, a_2 sont les coefficients respectifs de $1, x, x^2$ du polynôme P recherché. On obtient $(a_0, a_1, a_2) = (-7, 14, -4)$ donc $P(x) = -7 + 14x - 4x^2$.

   Remarque 1.1 Dans un cas plus général, la matrice V du système linéaire résultant a pour terme général : $v_{ij} = u_j(x_i) = x_i^j$ où i, j varient de 0 à n et où les $\{x_i\}$ sont les points du support d'interpolation :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice V est le déterminant de Vandermonde. Il a pour valeur, au signe près, le produit des différences deux à deux des x_i. Donc pour que la matrice V soit inversible il est nécessaire et suffisant que le support d'interpolation soit constitué de points deux à deux distincts.

• Les avantages de la base canonique sont :

– représentation habituelle d'un polynôme.

– facilité de dérivation et d'intégration.

– calcul de la valeur prise par le polynôme à l'aide de l'algorithme d'Hörner qui s'énonce :

Algorithme d'Hörner	
Initialisation	$b_0 = a_n$
Pour $k = 1, \dots$	
poser	$b_k = xb_{k-1} + a_{k-1}$
Poser	$p(x) = b_n$

Le polynôme P_n est donc construit de la manière suivante :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$$

dont la complexité est : n "+" et n "×".

• Le principal inconvénient est le problème de la résolution du système linéaire $Va = f$.

Ce calcul est assez long : $\left(\frac{n^3}{3} + n^2\right)$ "× ou /" et $\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}\right)$ "+ ou −" (soit environ $\frac{2n^3}{3}$ opérations), et c'est pourquoi nous allons choisir des bases qui le simplifient.

Au final,

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix} V^{-1} f}$$

2. On travaille ensuite dans la base de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3),\ L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3) \text{ et}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

On a alors $P(x) = 3L_0(x) + 5L_1(x) - L_2(x) = \frac{3}{2}(x-2)(x-3) - 5(x-1)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$.

Remarque 1.2 Le système linéaire le plus simple à résoudre est celui où la matrice V est la matrice identité ; or cette matrice dépend de la base et du support, donc il faut choisir une base qui conduise à une matrice identité, c'est-à-dire vérifiant : $v_{ij} = u_j(x_i) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon (symbole de Kronecker). Pour un support de $(n+1)$ points, chaque fonction de base u_j doit vérifier $(n+1)$ conditions d'interpolation ; c'est donc un polynôme degré n. Les polynômes de Lagrange construits sur le support d'interpolation sont définis par :

$$L_j(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \text{ pour } j = 0 \text{ à } n.$$

Le polynôme d'interpolation s'écrit alors :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$$

et la complexité pour un calcul est de $2(n^2+n)$ "× ou /" et $2n^2+3n$ "+ ou −", soit environ $4n^2$ opérations. Cette écriture n'est cependant pas très pratique pour intégrer ou dériver. Pour revenir à la base canonique on pose : $L_j(x) = \sum_{i=0}^{n} l_{i,j}x^i$, on peut alors mettre le polynôme sous la forme matricielle suivante :

$$P_n(x) = [1\ x\ \dots x^n]Lf$$

où L est la matrice de Lagrange associée au support à savoir :

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'obtient colonne par colonne en développant les polynômes de Lagrange suivant les puissances croissantes de la variable. On obtient donc un nouvel algorithme pour obtenir le polynôme d'interpolation sur la base canonique qui permet de :
- déterminer les polynômes de Lagrange associés au support.
- construire la matrice de Lagrange en résultant.
- effectuer le produit Lf pour arriver aux coefficients a_j.

Sa complexité est alors de $\dfrac{n^3+6n^2}{2}$ "$\times$ ou /" et $\dfrac{n^3+4n^2}{2}$ "+ ou −", soit environ n^3 opérations.
Cette méthode est donc un peu plus lente que la résolution du système $Va = f$, mais plus longue que l'algorithme d'Aitken.
Au final, puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = V^t \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & \dots & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 & \dots & L_n \end{pmatrix} V$ et donc

$$\boxed{P_n(x) = \begin{pmatrix} L_0 & \dots & L_n \end{pmatrix} V V^{-1} f = \begin{pmatrix} L_0 & \dots & L_n \end{pmatrix} f.}$$

3. On travaille enfin dans la base de Newton

$$N_0(x) = 1,\ N_1(x) = (x-1) \text{ et } N_2(x) = (x-1)(x-2).$$

On a alors $P(x) = 3N_0(x) + 2N_1(x) - 4N_2(x) = 3 + 2(x-1) - 4(x-1)(x-2)$ où les coefficients respectifs de $N_0(x), N_1(x), N_2(x)$ sont obtenus grâce aux différences divisées :

$$\begin{array}{c|lll} 1 & \boxed{3} & & \\ 2 & 5 & f[1;2] = \dfrac{3-5}{1-2} = \boxed{2} & \\ 3 & -1 & f[2;3] = \dfrac{5-(-1)}{2-3} = -6 & f[1;2;3] = \dfrac{2-(-6)}{1-3} = \boxed{-4} \end{array}.$$

Remarque 1.3 Un autre type de système linéaire facile à résoudre est celui où la matrice est triangulaire inférieure (ou supérieure). Il faut donc que la base vérifie : $v_{ij} = u_j(x_i) = 0$ si $i < j$ (ou $j < i$). On pose : $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j N_j(x)$ avec les polynômes de Newton :

$$N_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k).$$

Les coefficients sont calculés une seule fois à l'aide des différences divisées : pour une liste de points :

$$x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n,$$

on définit les différences divisées de proche en proche par :

$$f[x_k, ..., x_j] = \frac{f[x_k, \dots, x_{j-1}] - f[x_{k+1}, \dots, x_j]}{x_k - x_j}.$$

On démontre que : $b_0 = f[x_0] = f_0$ et $b_j = f[x_0, \dots, x_j]$ pour j de 1 à n. La complexité est de $\dfrac{n^2+3n}{2}$ "$\times$ ou /" et n^2+3n "+ ou −" soit environ $\dfrac{3n^2}{2}$ opérations ce qui est plus rapide que la résolution du système triangulaire de complexité $\dfrac{n^3+3n^2}{6}$ "$\times$ et +" soit environ $\dfrac{n^3}{3}$ opérations.
La valeur de l'interpolation est calculée par un algorithme du type Hörner. Donc complexité pour p évaluations de P_n : $\dfrac{3n^2}{2} + p3n$ opérations ; c'est de loin la méthode la plus rapide pour calculer des valeurs interpolées.
N.B. : nous avons utilisé ici la base de Newton progressive, mais il existe aussi une base rétrograde.

Au final, puisque $\begin{pmatrix} 1 & \dots & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} N_0 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\boxed{P_n(x) = \begin{pmatrix} L_0 & \dots & L_n \end{pmatrix} V V^{-1} f = \begin{pmatrix} L_0 & \dots & L_n \end{pmatrix} f.}$$

Exercice 4 *Correction* :

1. On utilise la base de Newton suivante : $\{1, (x-1), (x-1)(x-1,5), (x-1)(x-1,5)(x-2)\}$ et on donne ensuite la table des différences divisées du problème :

$$\begin{array}{c|llll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1} & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1]-f[x_2]}{x_1-x_2} & f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2]-f[x_3]}{x_2-x_3} & f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3} & f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}
\end{array}$$

Numériquement, on obtient :

$$\begin{array}{c|llll}
1 & \boxed{0} & & & \\
1,5 & 1 & f[1;1,5] = \dfrac{0-1}{1-1,5} = \boxed{2} & & \\
2 & 2 & f[1,5;2] = \dfrac{1-2}{1,5-2} = 2 & f[1;1,5;2] = \dfrac{2-2}{1-2} = \boxed{0} & \\
2,5 & -1,5 & f[2;2,5] = \dfrac{2-(-1,5)}{2-2,5} = -7 & f[1,5;2;2,5] = \dfrac{-2-7}{1,5-2,5} = -9 & f[1;1,5;2;2,5] = \dfrac{0-9}{1-2,5} = \boxed{\text{-6}}
\end{array}.$$

Le polynôme d'interpolation de f pour le support $\{1; 1,5; 2; 2,5\}$ est donc :

$$\begin{array}{rcl}
P(x) & = & \boxed{0}.1 + \boxed{2}.(x-1) + \boxed{0}.(x-1)(x-1,5) + \boxed{\text{-6}}.(x-1)(x-1,5)(x-2) \\
& = & 2(x-1) - 6(x-1)(x-1,5)(x-2)
\end{array}.$$

2. On évalue $f(1,8)$ en utilisant P : $f(1,8) \simeq P(1,8) = 1,888$.

Exercice 5 *Correction* : On applique le théorème de Rolle par récurrence, on montre que si la fonction $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ s'annule en $n+2$ points distincts de $[a,b]$ alors sa dérivée d'ordre $(n+1)$ possède au moins un zéro dans $[a,b]$.

- Si le point x coïncide avec l'un des x_i alors $e(x_i) = 0$ et
$$0 = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j) f^{(n+1)}(\xi_x) = e(x_i)$$
d'où l'identité entre les deux termes.
- Si $x \neq x_i$, on considère la fonction
$$g(t) = f(t) - p(t) - e(x) \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{t - x_i}{x - x_i} \right),\ a \leq t \leq b.$$
On a $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $g(x) = 0$ et $g(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$ donc il existe $\xi_x \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. On a
$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - e(x) \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{(x - x_i)} (n+1)!$$
et $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ implique
$$e_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Exercice 6 *Correction* :

1. $x \mapsto (x-1)(x+1)$ est une fonction polynomiale de degré 2, paire, s'annulant en 1 et -1, convexe. Sa représentation graphique est une portion de parabole (on travaille sur $[-1,1]$), qui se trouve de fait au dessus de chacune de ses tangentes.
2. Les résultats sont sensiblement les mêmes. $x \mapsto \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$ est une fonction polynomiale de degré 2, paire, s'annulant en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, convexe. Sa représentation graphique est une portion de parabole (on travaille toujours sur $[-1,1]$).
3. On rappelle que pour un support $\{x_0, x_1\}$, l'erreur d'interpolation s'écrit :
$$e(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2} (x - x_0)(x - x_1).$$

or $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)| = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ lorsque } \{x_0,x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ 1 \text{ lorsque } \{x_0,x_1\} = \{-1,1\} \end{cases}$ et $f^{(2)}(\xi_x)$ est indépendant du support donc on minimisera l'erreur en prenant le support $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

4. Le support étant constitué de deux points, le polynôme interpolant $x \mapsto x^3$ est de degré 1, c'est-à-dire de la forme $P(x) = ax+b$. Comme $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}a + b = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}a + b = \frac{\sqrt{2}}{4}$, on obtient aisément $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Ainsi, le polynôme recherché est $P(x) = \frac{1}{2}x$. La formule de l'erreur donne alors :
$$e(x) = \frac{6\xi_x}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ avec } \xi_x \in [-1,1].$$
En notant que $|\xi_x| \leq 1$ et $\left|\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$, on obtient $|e(x)| \leq \frac{6}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

5. Il faut choisir le support $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. En effet, en traçant les courbes $y = x(x-1)(x+1)$, $y = x\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $y = x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, on s'aperçoit que :
$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| < \sup_{x\in[-1,1]}\left|x\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| < \sup_{x\in[-1,1]}|x(x-1)(x+1)|.$$

Exercice 7 *Correction* :

L'algorithme d'Aitken construit une suite de polynômes réalisant l'interpolation de Lagrange sur un nombre de plus en plus élevé de points de base x_j. Plus précisément, cet algorithme calcule $P(\alpha)$ en utilisant successivement les polynômes de degré $0, 1, \ldots, n$ construits respectivement sur $1, 2\ldots, n+1$ points de base x_j parmi les abscisses x_i données. Le calcul peut être présenté sous la forme d'un tableau triangulaire.

$$\begin{array}{llllll}
P_{0,0} = y_0 & & & & & \\
P_{1,0} = y_1 & P_{0,1}(\alpha) & & & & \\
P_{2,0} = y_2 & P_{1,1}(\alpha) & P_{0,2}(\alpha) & & & \\
P_{3,0} = y_3 & P_{2,1}(\alpha) & P_{1,2}(\alpha) & P_{0,3}(\alpha) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
P_{k,0} = y_i & P_{i-1,1}(\alpha) & P_{i-2,2}(\alpha) & \cdots & P_{0,i}(\alpha) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
P_{n,0} = y_n & P_{n-1,1}(\alpha) & P_{n-2,2}(\alpha) & \cdots & \cdots & P_{0,n}(\alpha)
\end{array}$$

$P_{0,1}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_1,
$P_{1,1}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_2,
$P_{i-1,1}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_i,
$P_{n-1,1}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_n,
$P_{0,i}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_1,...,x_{i-1},x_i,
$P_{n-i,i}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_1,...,x_{i-1},x_n,
$P_{n,n}$	réalise l'interpolation sur la base des points x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n.

Chaque colonne est déterminée à partir de la précédente par la formule
$$P_{i,j+1}(\alpha) = \frac{(\alpha - x_i)P_{i+1,j}(\alpha) - (\alpha - x_{i+j+1})P_{i,j}(\alpha)}{x_{i+j+1} - x_i}$$
On montre que pour obtenir $P_{n,n}(\alpha)$, polynôme réalisant l'interpolation de Lagrange sur les $n+1$ points, il faut $n(n+1)$ multiplications et $\frac{n(n+1)}{2}$ divisions pour chaque point α. Ceci ne représente pas un gain énorme par rapport au calcul direct, cependant, on constate fréquemment qu'on obtient un résultat satisfaisant pour un degré k inférieur à n et en s'arrêtant au calcul de $P_{k,k}$.

1. Grâce à l'algorithme d'Aitken, on trouve $P_{0,1}(x) = -3x+2$, $P_{1,1}(x) = 2$ et
$$P_{0,2}(x) = \frac{(x+1)P_{1,1}(x) - (x-2)P_{0,1}(x)}{2-(-1)} = \frac{(x+1)(2) - (x-2)(2-3x)}{3} = x^2 - 2x + 2.$$

On en déduit donc une approximation de $f(1)$ soit $f(1) \simeq P(1) = 1$

2. On déduit la matrice des vecteurs de la base de Lagrange :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3} = \boxed{0} \times 1 + \boxed{\text{-4/6}} \times x + \boxed{2/6} \times x^2, \\
L_1(x) &= \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2} = \boxed{6/6} \times 1 + \boxed{3/6} \times x + \boxed{\text{-3/6}} \times x^2, \\
L_2(x) &= \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2+x}{6} = \boxed{0} \times 1 + \boxed{1/6} \times x + \boxed{1/6} \times x^2.
\end{aligned}$$

3. En un point y et pour une valeur h du pas de discrétisation tels que g soit trois fois dérivable sur l'intervalle $[y-h, y+h]$, la formule de Taylor-Young conduit aux deux relations :
   - $g(y+h) = g(y) + \sum_{n=1}^{3} \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(y) + h^3 \varepsilon_1(y,h)$,
   - $g(y-h) = g(y) + \sum_{n=1}^{3} \frac{(-h)^n}{n!} g^{(n)}(y) + h^3 \varepsilon_2(y,h)$

   où les deux fonctions $\varepsilon_i(y,h)$ convergent vers 0 avec h. Par conséquent
   - $\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) + \frac{h}{2} g''(y) + \frac{h^2}{3!} g^{(3)}(y) + h^2 \varepsilon_1(y,h)$,
   - $\frac{g(y-h)-g(y)}{h} = -g'(y) + \frac{h}{2} g''(y) - \frac{h^2}{3!} g^{(3)}(y) + h^2 \varepsilon_2(y,h)$

   correspondent à deux approximations de $g'(y)$ du premier ordre en h. En soustrayant les développements précédents, on obtient

$$\frac{g(y+h)-g(y-h)}{2h} = g'(y) + \frac{h^2}{6} g^{(3)}(y) + h^2 \varepsilon_3(y,h)$$

   qui est une approximation de $g'(y)$ du second ordre en h. On pose alors $y = \alpha + h$ et on a

$$g'(\alpha+h) \simeq \frac{1}{2h}[g(\alpha+2h) - g(\alpha)].$$

4. On applique le résultat précédent à $g = f$, $\alpha + h = 1$ et on obtient :

$$f'(1) \simeq \frac{1}{2h}[f(1+h) - f(1-h)] \simeq \frac{1}{2h}[((1+h)^2 - 2(1+h) + 2) - ((1-h)^2 - 2(1-h) + 2)] \simeq 0.$$

Exercice 8 *Correction* :

1. On utilise la base de Newton $\{1, (x-1), (x-1)(x-2)\}$ et on calcule les différences divisées associées :

$$\begin{array}{llll}
1 & 1/4 & & \\
2 & 1/9 & -5/36 & \\
5 & 1/36 & -1/36 & 1/36
\end{array}$$

   On a alors $f(x) \simeq P(x) = \frac{1}{4} - \frac{5}{36}(x-1) + \frac{1}{36}(x-1)(x-2)$. On en déduit que $f(3) \simeq \frac{1}{36}$.

2. On déduit la matrice des vecteurs de la base de Lagrange :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} = \frac{x^2-7x+10}{4} = \boxed{30/12} \times 1 + \boxed{\text{-21/12}} \times x + \boxed{3/12} \times x^2, \\
L_1(x) &= \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} = \frac{x^2-6x+5}{-3} = \boxed{\text{-20/12}} \times 1 + \boxed{24/12} \times x + \boxed{\text{-4/12}} \times x^2, \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = \frac{x^2-3x+2}{12} = \boxed{2/12} \times 1 + \boxed{\text{-3/12}} \times x + \boxed{1/12} \times x^2.
\end{aligned}$$

3. De la question précédente on déduit que

$$f'(x) \simeq \left(\sum_{i=0}^{2} f_i L_i(x) \right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{-2x}{3} + 2\right) + \frac{1}{36}\left(\frac{x}{6} - \frac{1}{4}\right)$$

   et par conséquent, $f'(3) \simeq -\frac{1}{2 \times 8} + \frac{1}{18 \times 8} = -\frac{1}{18}$.
   On peut trouver cette valeur plus rapidement en dérivant l'expression du polynôme P dans la base de Newton. On a $P'(x) = \frac{x}{18} - \frac{8}{36}$ et on retrouve $f'(3) \simeq P_2(3) = -\frac{1}{18}$.

4. On a

$$R_1(1) = \frac{a_0}{1 + a_1 + a_2} = \frac{1}{4},\ R_1(2) = \frac{a_0}{1 + 2a_1 + 4a_2} = \frac{1}{9},\ R_1(5) = \frac{a_0}{1 + 5a_1 + 25a_2} = \frac{1}{36}$$
$$\Leftrightarrow 4a_0 - a_1 - a_2 = 1,\ 9a_0 - 2a_1 - 4a_2 = 1,\ 36a_0 - 5a_1 - 25a_2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 36a_0 - 9a_1 - 9a_2 = 1,\ 36a_0 - 8a_1 - 16a_2 = 1,\ 36a_0 - 5a_1 - 25a_2 = 1$$

qu'il suffit ensuite de réécrire sous la forme du système proposé.