*Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012*

Analyse Numérique

**Fiche 10** - Méthodes itératives de résolution de systèmes linaires.

**Exercice 1** *Méthode itérative du "gradient à pas fixe".*
Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour trouver la solution de $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

- Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$,
- Itérations : $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \alpha(b - Ax^{(n)})$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ (en fonction des valeurs propres de $A$) la méthode est-elle convergente ?
2. Calculer $\alpha_0$ (en fonction des valeurs propres de $A$) t.q. $\rho(Id - \alpha_0 A) = \min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}}\{\rho(Id - \alpha A)\}$.

**Exercice 2** *Méthode de la puissance.*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soit $\lambda_N \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A$ telle que $|\lambda_N| = \rho(A)$ et soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $-\lambda_N$ n'est pas une valeur propre de $A$ et que $x^{(0)}$ n'est pas orthogonal à $\ker(A - \lambda_N Id)$. On définit la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par $x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que
   (a) $\dfrac{x^{(n)}}{(\lambda_N)^n} \to x$, quand $n \to \infty$, avec $x \neq 0$ et $Ax = \lambda_N x$.
   (b) $\dfrac{\|x^{(n+1)}\|}{\|x^{(n)}\|} \to \rho(A)$ quand $n \to \infty$.
   Cette méthode de calcul s'appelle "méthode de la puissance".
2. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^N$. Pour calculer $x$ t.q. $Ax = b$, on considère la méthode itérative $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$, appelée "méthode I", et on suppose $B$ symétrique. Montrer que, sauf cas particuliers à préciser,
   (a) $\dfrac{\|x^{(n+1)} - x\|}{x^{(n)} - x\|} \to \rho(B)$ quand $n \to \infty$ (ceci donne une estimation de la vitesse de convergence).
   (b) $\dfrac{\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|}{\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|} \to \rho(B)$ quand $n \to \infty$ (ceci permet d'estimer $\rho(B)$ au cours des itérations).

**Exercice 3** *Méthode de la puissance inverse.*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq N)$ les valeurs propres de $A$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$, on cherche à calculer $\lambda_i$. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $x^{(0)}$ n'est pas orthogonal à $\ker(A - \lambda_i Id)$. On suppose également qu'on connaît $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j|$ pour tout $j \neq i$. On définit la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par $(A - \lambda Id)x^{(n+1)} = x^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

1. $x^{(n)}(\lambda_i - \mu)^n \to x$, quand $n \to \infty$, avec $x \neq 0$ et $Ax = \lambda_i x$.
2. $\dfrac{\|x^{(n+1)}\|}{\|x^{(n)}\|} \to \dfrac{1}{|\mu - \lambda_i|}$ quand $n \to \infty$.

**Exercice 4** *Non convergence de la méthode de Jacobi.*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A$ est symétrique définie positive si et seulement si $-1/2 < a < 1$ et que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-1/2 < a < 1/2$.

**Exercice 5** *Jacobi pour les matrices à diagonale dominante stricte.*
Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale dominante stricte (c'est-à-dire telle que $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$

pour tout $i = 1, \ldots, N$). Montrer que $A$ est inversible et que la méthode de Jacobi (pour calculer la solution de $Ax = b$) converge.

**Exercice 6** *Jacobi pour les matrices à diagonale dominante forte.*
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $a$ et $b$ sont des réels donnés ; on considère le système linéaire $Ax = b$ issu de la discrétisation par différences finies de pas uniforme égal à $h = \dfrac{1}{N+1}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) = f(x), \; x \in [0,1] \\ u(0) = 0, u(1) = 1, \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$.

1. Donner l'expression de $A$ et $b$.
2. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la résolution de ce système converge (distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha = 0$).
3. On considère maintenant une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ inversible quelconque.
   (a) Montrer que si $A$ est symétrique définie positive alors tous ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. En déduire que la méthode de Jacobi est bien définie.
   (b) On suppose maintenant que la matrice diagonale extraite de $A$, notée $D$, est inversible. On suppose de plus que
   $$\forall i = 1, \ldots, N, \; |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ et } \exists i_0 \in \{1, \ldots, n\}, \; |a_{i_0 i_0}| > \sum_{j \neq i_0} |a_{ij}|.$$
   (On dit que la matrice est à diagonale fortement dominante).
   Soit $J$ la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.
      i. Montrer que $\rho(J) \leq 1$.
      ii. Montrer que si $Jx = \lambda x$ avec $|\lambda| = 1$, alors $x_i = \|x\|$ ; $\forall i = 1, \ldots, N$. En déduire que $x = 0$ et que la méthode de Jacobi converge.
      iii. Retrouver ainsi le résultat de la question 1.(b).

**Exercice 7** *Diagonalisation dans $\mathbb{R}$.*
Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $N \in \mathbb{N}$ muni d'un produit scalaire, noté $(.,.)$. Soient $T$ et $S$ deux applications linéaires symétriques de $E$ dans $E$ ($T$ symétrique signifie $(Tx, y) = (x, Ty)$ pour tous $x, y \in E$). On suppose que $T$ est définie positive (c'est-à-dire $(Tx, x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$).

1. Montrer que $T$ est inversible. Pour $x, y \in E$, on pose $(x, y)_T = (Tx, y)$. Montrer que l'application $(x, y) \to (x, y)_T$ définit un nouveau produit scalaire sur $E$.
2. Montrer que $T^{-1}S$ est symétrique pour le produit scalaire défini à la question précédente. En déduire qu'il existe une base de $E$, notée $\{f_1, \ldots, f_N\}$ et un $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ t.q. $T^{-1}Sf_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et t.q. $(Tf_i / f_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$.

**Exercice 8** *Méthode de Jacobi et relaxation.*
Soit $N \geq 1$. Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $D$ la partie diagonale de $A$, $-E$ la partie triangulaire inférieure de $A$ et $-F$ la partie triangulaire supérieure de $A$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} D = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}, \; d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j, \; d_{ii} = a_{ii}, \\ E = (e_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}, \; e_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j, \; e_{ij} = -a_{ij} \text{ si } i > j, \\ F = (f_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}, \; f_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j, \; f_{ij} = -a_{ij} \text{ si } i < j. \end{array}$$

On notera que $A = D - E - F$. Soit $b \in \mathbb{R}^N$. On cherche à calculer $x \in \mathbb{R}^N$ t.q. $Ax = b$. On suppose que $D$ est définie positive ($A$ n'est pas forcément inversible). On s'intéresse ici à la méthode de Jacobi (par points), c'est-à-dire à la méthode itérative suivante :
- Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$,
- Itérations : Pour $n \in \mathbb{N}$, $Dx^{(n+1)} = (E+F)x^{(n)} + b$.

On pose $J = D^{-1}(E+F)$.

1. Montrer, en donnant un exemple avec $N = 2$, que $J$ peut ne pas être symétrique.
2. Montrer que $J$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et, plus précisément, qu'il existe une base de $\mathbb{R}^N$, notée $\{f_1, \ldots, f_N\}$, et il existe $\{\mu_1, \ldots, \mu_N\} \subset \mathbb{R}$ t.q. $Jf_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et t.q. $Df_i \cdot f_j = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$.
   En ordonnant les valeurs propres de $J$, on a donc $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_N$, on conserve cette notation dans la suite.

3. Montrer que la trace de $J$ est nulle et en déduire que $\mu_1 \leq 0$ et $\mu_N \geq 0$.
   On suppose maintenant que $A$ et $2D - A$ sont symétriques définies positives et on pose $x = A^{-1}b$.
4. Montrer que la méthode de Jacobi (par points) converge (c'est-à-dire $x^{(n)} \to x$ quand $n \to \infty$).
   On se propose maintenant d'améliorer la convergence de la méthode par une technique de relaxation. Soit $\omega > 0$, on considère la méthode suivante :
   – Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$,
   – Itérations : Pour $n \in \mathbb{N}$, $D\tilde{x}^{(n+1)} = (E+F)x^{(n)} + b$, $x^{(n+1)} = \omega\tilde{x}^{(n+1)} + (1-\omega)x^{(n)}$.
5. Calculer les matrices $M_\omega$ (inversibles) et $N_\omega$ telles que $M_\omega x^{(n+1)} = N_\omega x^{(n)} + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de $\omega$, $D$ et $A$. On note dans la suite $J_\omega = (M_\omega)^{-1}N_\omega$.
6. On suppose dans cette question que $(2/\omega)D - A$ est symétrique définie positive. Montrer que la méthode converge (c'est-à-dire que $x^{(n)} \to x$ quand $n \to \infty$).
7. Montrer que $(2/\omega)D - A$ est symétrique définie positive si et seulement si $\omega < 2/(1-\mu_1)$.
8. Calculer les valeurs propres de $J_\omega$ en fonction de celles de $J$. En déduire, en fonction des $\mu_i$, la valeur "optimale" de $\omega$, c'est-à-dire la valeur de $\omega$ minimisant le rayon spectral de $J_\omega$.

**Exercice 9** *Jacobi et Gauss-Seidel.*
Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre $N$ tridiagonale, c'est-à-dire telle que $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$, et telle que la matrice diagonale $D = diag(a_{ii})_{i=1,\ldots,N}$ soit inversible. On note $A = D - E - F$ où $-E$ (resp. $-F$) est la partie triangulaire inférieure (resp. supérieure) de $A$, et on note $J$ et $G$ les matrices d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel associées à la matrice $A$.

1. (a) Pour $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ et $x \in \mathbb{C}^N$, on note
   $$x_\mu = (x_1, \mu x_2, \ldots, \mu^{k-1}x_k, \ldots, \mu^{N-1}x_N)^t.$$
   Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $J$ associée au vecteur propre $x$, alors $x\mu$ vérifie $(\mu E + \frac{1}{\mu}F)x_\mu = \lambda D x_\mu$. En déduire que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $J$ alors $\lambda^2$ est valeur propre de $G$.
   (b) Montrer que si $\lambda^2$ est valeur propre non nulle de $G$, alors $\lambda$ est valeur propre de $J$.
2. Montrer que $\rho(G) = \rho(J)^2$. En déduire que lorsqu'elle converge, la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$ converge plus rapidement que la méthode de Jacobi.
3. Soit $\mathcal{L}_\omega$ la matrice d'itération de la méthode SOR associée à $A$. Montrer que $\lambda$ est valeur propre de $J$ si et seulement si $\nu_\omega$ est valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$, où $\nu_\omega = \mu_\omega^2$ et $\mu_\omega$ vérifie $\mu_\omega^2 - \lambda\omega\mu_\omega - 1 = 0$. En déduire que
   $$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_{\lambda \in Sp(J)} \{|\mu\omega^2 - \lambda\omega\mu_\omega - 1 = 0\}.$$

**Exercice 10** *Une méthode itérative particulière.*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = Id - E - F$ avec
$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A$ est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative (pour trouver la solution de $Ax = b$) suivante :
   $$\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)x^{n+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right)x^n + b.$$
   Il s'agit donc de la "méthode I" avec $B = \mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right)$.
3. Calculer, en fonction de $\omega$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ et son rayon spectral.
4. Pour quelles valeurs de $\omega$ la méthode est-elle convergente ? Déterminer $\omega_0 \in ]0,2[$ t.q.
   $$\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min\left\{\rho(\mathcal{L}_\omega), \omega \in ]0,2[, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

**Exercice 11** *Méthode des directions alternées.*
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre $N$ symétrique inversible et $b \in \mathbb{R}^N$. On cherche à calculer $u \in \mathbb{R}^N$, solution du système linéaire suivant : $Au = b$. On suppose connues des matrices $X$ et $Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, symétriques. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, choisi tel que $X + \alpha Id$ et $Y + \alpha Id$ soient définies positives (où $Id$ désigne la matrice identité d'ordre $N$) et $X + Y + \alpha Id = A$.
Soit $u^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, on propose, pour résoudre le système, la méthode itérative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (X+\alpha Id)u^{(k+1/2)} & = & -Yu^{(k)}+b, \\ (Y+\alpha Id)u^{(k+1)} & = & -Xu^{(k+1/2)}+b. \end{array} \right.$$

1. Montrer que la méthode itérative définie précédemment définit bien une suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et que cette suite converge vers la solution $u$ du système si et seulement si

$$\rho((Y+\alpha Id)^{-1}X(X+\alpha Id)^{-1}Y)<1.$$

(On rappelle que pour toute matrice carrée d'ordre $N$, $\rho(M)$ désigne le rayon spectral de la matrice $M$.)

2. Montrer que si les matrices $\left(X+\dfrac{\alpha}{2}Id\right)$ et $\left(Y+\dfrac{\alpha}{2}Id\right)$ sont définies positives alors la méthode itérative converge. On pourra pour cela (mais ce n'est pas obligatoire) suivre la démarche suivante :
   (a) Montrer que $\rho((Y+\alpha Id)^{-1}X(X+\alpha Id)^{-1}Y)=\rho(X(X+\alpha Id)^{-1}Y(Y+\alpha Id)^{-1})$.
   (b) Montrer que $\rho(X(X+\alpha Id)^{-1}Y(Y+\alpha Id)^{-1})\leq\rho(X(X+\alpha Id)^{-1})\rho(Y(Y+\alpha Id)^{-1})$.
   (c) Montrer que $\rho(X(X+\alpha Id)^{-1})<1$ si et seulement si la matrice $\left(X+\dfrac{\alpha}{2}Id\right)$ est définie positive.
   (d) Conclure.

3. Soit $f\in\mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$ et soit $A$ la matrice carrée d'ordre $N=M\times M$ obtenue par discrétisation de l'équation $-\Delta u=f$ sur le carré $[0,1]\times[0,1]$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u=0$ sur $\partial\Omega$, par différences finies avec un maillage uniforme de pas $h=\dfrac{1}{M}$, et $b$ le second membre associé.
   (a) Donner l'expression de $A$ et $b$.
   (b) Proposer des choix de $X$, $Y$ et $\alpha$ pour lesquelles la méthode itérative converge dans ce cas et qui justifient l'appellation “méthode des directions alternées” qui lui est donnée.