Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 1 - Interpolation polynomiale.

Exercice 1

1. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.
   (a) Calculer $P(1), P'(1), P''(1)$.
   (b) Trouver toutes les racines de P.
   (c) Factoriser P.
2. On considère les 3 polynômes $\begin{cases} P_0(x) = 3 \\ P_1(x) = (x-2) \\ P_2(x) = (x-1)^2 \end{cases}$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ constituée des 3 polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$ (l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 et d'indéterminée x).
   (b) Exprimer chaque élément de la base canonique $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ dans cette nouvelle base.

Exercice 2 On a $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $f(t_0) = 1$, $f(t_1) = 3$, $f(t_2) = 4$.

1. Écrire le polynôme P_0 de degré 0 qui interpole f en t_0.
2. Écrire le polynôme P_1 de degré 1 qui interpole f en t_0, t_1.
3. Écrire le polynôme P_2 de degré 2 qui interpole f en t_0, t_1, t_2.
4. Écrire chacun des polynômes dans la base de Newton.

Exercice 3 Déterminer le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points $M_0(1, 3)$, $M_1(2, 5)$, $M_2(3, -1)$

1. dans la base canonique,
2. dans la base de Lagrange,
3. dans la base de Newton.

Exercice 4 On donne les valeurs numériques suivantes :

x	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	0	1	2	-1,5

1. En utilisant la base de Newton, déterminer le polynôme qui interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ sur le support $\{1; 1,5; 2; 2,5\}$
2. Évaluer $f(1,8)$.

Exercice 5 Montrer que si une fonction f est assez régulière ($f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a, b])$) et si la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de son polynôme d'interpolation P_n est nulle, alors pour tout x, il existe ξ_x tel que :

$$e_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right) f^{(n+1)}(\xi_x) \text{ où } f^{(n+1)} \text{ est la dérivée d'ordre } (n+1).$$

Exercice 6 On considère une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré 1 qui interpole f pour le support $\{x_0, x_1\}$.

1. Étudier la fonction $x \mapsto (x - 1)(x + 1)$ pour $x \in [-1, 1]$.

2. Même question pour la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. Pour réaliser une interpolation numérique d'une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, quels points de support $\{x_0, x_1\}$ doit-on choisir : $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$? Pourquoi ?
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 de $x \mapsto x^3$ qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1, 1]$.
5. En utilisant la calculatrice, dites parmi les supports suivants lequel vous choisiriez pour une interpolation à 3 points ?

$$\{-1, 0, 1\},\ \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

   Pourquoi ?

Exercice 7 On considère la fonction tabulée :

x_i	-1	0	2
f_i	5	2	2

1. Calculer une approximation de la valeur de f en $x = 1$ par la méthode d'Aitken .
2. Montrer que la matrice de Lagrange sur le support $E_3 = \{-1, 0, 2\}$ est :

$$L_{E_3} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On suppose qu'une fonction $g(t)$ est connue aux points $\{\alpha - h, \alpha, \alpha + 2h\}$.
   Déterminer une formule d'approximation de la dérivée première de g au point $\alpha + h$. Que constate-t-on ?
4. En déduire une valeur approchée de la dérivée première de f en $x = 1$.

Exercice 8 On considère la fonction tabulée f :

x_i	1	2	5
f_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

1. Calculer une approximation de la valeur de f en $x = 3$ par la méthode de Newton.
2. Montrer que la matrice de Lagrange sur le support $E_3 = \{1, 2, 5\}$ est :

$$L_{E_3} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 30 & -20 & 2 \\ -21 & 24 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire une valeur approchée de la dérivée première de f en $x = 3$. Ne pouvait-on pas trouver cette valeur plus rapidement ?
4. On interpole f par une fraction rationnelle du type : $R_1(x) = \dfrac{a_0}{1 + a_1 x + a_2 x^2}$. Montrer que les coefficients a_j sont déterminés par le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 36 & -9 & -9 \\ 36 & -8 & -16 \\ 36 & -5 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$