Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 2 - Interpolation polynomiale.

Exercice 1 *Correction* :

$$V_{n+1}(x_0,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = |\mathcal{V}_{n+1}(x_0,\ldots,x_n)|.$$

En algèbre linéaire, une matrice de Vandermonde est une matrice avec une progression géométrique dans chaque ligne. Elle tient son nom d'Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796).
Prouvons le résultat de l'exercice.

– On exécute dans un premier temps l'opération élémentaire $c_i \leftarrow c_i - x_0 \times c_{i-1}$ sur les colonnes partant de c_n et en remontant jusqu'à c_2. On obtient
$$V_{n+1}(x_0,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & \ldots & x_1^{n-1}(x_1-x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_0 & \ldots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{vmatrix}$$
– (on développe ensuite le déterminant suivant la première ligne)
$$=1\times\begin{vmatrix} x_1-x_0 & \ldots & x_1^{n-1}(x_1-x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n-x_0 & \ldots & x_n^{n-1}(x_n-x_0) \end{vmatrix}$$
– (on utilise la multilinéarité du déterminant)
$$=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\ldots(x_n-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
– (par récurrence immédiate)
$$=[(x_1-x_0)(x_2-x_0)\ldots(x_n-x_0)][(x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)]\ldots[(x_n-x_{n-1}]=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

On déduit de ce résultat que la matrice de Vandermonde $\mathcal{V}_{n+1}(x_0,\ldots,x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exercice 2 *Correction* : On considère le polynôme P défini par $P(x)=1-x+x^2$, ainsi que les points $x_0=-1$, $x_1=2$ et $x_2=3$.

1. On utilise la base de Lagrange $(L_0(x),L_1(x),L_2(x))$ définie par :
   - $L_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)}=\dfrac{1}{12}(x-2)(x-3)$,
   - $L_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(2-(-1))(2-3)}=-\dfrac{1}{3}(x+1)(x-3)$,
   - $L_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(3-(-1))(3-2)}=\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)$.

   Par conséquent,
$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0)L_0(x)+P(x_1)L_1(x)+P(x_2)L_2(x) \\ &= \frac{1}{4}(x-2)(x-3)-(x+1)(x-3)+\frac{7}{4}(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

2. On utilise la base de Newton $(N_0(x),N_1(x),N_2(x))$ définie par :
   - $N_0(x)=1$,

- $N_1(x) = (x+1)$,
- $N_2(x) = (x+1)(x-2)$.

Grâce aux différences divisées

$$\begin{array}{c|lll}
-1 & f[-1] = \boxed{3} & & \\
2 & f[2] = 3 & f[-1,2] = \dfrac{3-3}{-1-2} = \boxed{0} & \\
3 & f[3] = 7 & f[2,3] = \dfrac{3-7}{2-3} = 4 & f[-1,2,3] = \dfrac{0-4}{-1-3} = \boxed{1}
\end{array}$$

on obtient

$$P(x) = f[-1]N_0(x) + f[-1,2]N_1(x) + f[-1,2,3]N_2(x) = 3 + (x+1)(x-2).$$

Exercice 3 *Correction* :

1. Cherchons à exprimer $I(k)$ à l'aide des vecteurs de base de Lagrange
   - $L_0(k) = \dfrac{(k-4)(k-6)}{(1-4)(1-6)} = \dfrac{1}{15}(k-4)(k-6)$,
   - $L_1(k) = \dfrac{(k-1)(k-6)}{(4-1)(4-6)} = -\dfrac{1}{6}(k-1)(k-6)$,
   - $L_2(k) = \dfrac{(k-1)(k-4)}{(6-1)(6-4)} = \dfrac{1}{10}(k-1)(k-4)$.

   Alors, le polynôme de degré 2 qui interpole I aux points $(1, I(1))$, $(4, I(4))$, $(6, I(6))$ est donné par :

   $$P(k) = (1,5709)\frac{1}{15}(k-4)(k-6) - (1,5727)\frac{1}{6}(k-1)(k-6) + (1,5751)\frac{1}{10}(k-1)(k-4).$$

   Ainsi,

   $$P(3,5) = (1,5709)\frac{1}{15}(1,25) + (1,5727)\frac{1}{6}(6,25) - (1,5751)\frac{1}{10}(1,25) \simeq 1,57225$$

   désigne une valeur approchée de $I(3,5)$.
2. Soient les vecteurs de base de Newton
   - $N_0(k) = 1$,
   - $N_1(k) = (k-1)$,
   - $N_2(k) = (k-1)(k-4)$.

   $I(k)$ peut s'exprimer (approximativement) comme combinaison linéaire de vecteurs de base dont les coefficients ou différences divisées, sont calculés de la manière suivante :

   $$\begin{array}{c|lll}
   1 & f[1] = \boxed{1{,}5709} & & \\
   4 & f[4] = 1,5727 & f[1,4] = \dfrac{1,5709-1,5727}{1-4} = \boxed{0{,}0006} & \\
   6 & f[6] = 1,5751 & f[4,6] = \dfrac{1,5727-1,5751}{4-6} = 0,0012 & f[1,4,6] = \dfrac{0,0006-0,0012}{1-6} = \boxed{0{,}00012}
   \end{array}$$

   On a par conséquent

   $$P(k) = 1,5709 + 0,0006(k-1) + 0,00012(k-1)(k-4)$$

   et $I(3,5) \simeq P(3,5) = 1,57225$.
   On remarque que les deux approximations sont égales à 10^{-4} près.

Exercice 4 *Correction* :

a) On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange des données $x_0, \ldots, x_n$ et $f(x_0), \ldots f(x_n)$ est défini par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}_{L_i(x)}.$$

et $L(x)=f(x)$ si et seulement si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
Il suffit alors d'appliquer la formule précédente à la fonction $f : x \mapsto x^k$ où $0 \le k \le n$. On obtient

$$x^k = \sum_{i=0}^{n} (x_i)^k L_i(x).$$

b) On a d'après $a)$:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x - x_j) = x^k,\ \forall k \in \{0,\dots,n\}.$$

On remarque tout d'abord que $\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x - x_j)$ et x^k sont des polynômes de degrés respectifs n et k, avec $k \in \{0,\dots,n\}$. On peut donc, par identification des coefficients de x^n, en déduire que :

- si $k=n$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^k \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x_i - x_j)} = 1$,
- si $k<n$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^k \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x_i - x_j)} = 0$,

ce qui donne le résultat final.

c) On considère le polynôme $Q_t : x \mapsto (x-t)^j \in \mathcal{P}_n$ pour $j=0,\dots,n$. La formule de Lagrange donne :

$$Q_t(x) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - t)^j L_i(x).$$

- Si $j=0$, $Q_t(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_i - t)^0 L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.
- Pour $1 \le j \le n$, on a $Q_x(x) = (x-x)^j = 0$ d'où :

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^j L_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j=0 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \le j \le n \end{cases}.$$

d) Si P est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0,\dots,x_n$, on a

- dans la base de Newton, $P(x) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\dots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$,
- dans la base de Lagrange, $P(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} \left(\frac{x-x_j}{x_i - x_j}\right)$.

Par identification du coefficient de x^n apparaissant dans ces deux polynômes, on obtient

$$f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}} (x_i - x_j)}.$$

Exercice 5 *Correction* :

1. - $f : x \mapsto e^x$ est indéfiniment dérivable (et croissante) sur $\mathbb{R}$. Comme $f^{(n+1)}(x) = e^x$, $\forall x \in [a,b]$, la formule de l'énoncé nous permet d'affirmer que :

$$|e_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} e^b.$$

   (En effet, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \le \prod_{i=0}^{n} (b-a) = (b-a)^{n+1}$ et $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} \le e^b$.)
   Par suite, $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} e^b$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme vers f sur $[a,b]$ de $f(x) = e^x$.

(Afin de prouver que $\frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a utilisé le fait que la série $e^{b-a} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(b-a)^k}{k!}$ converge et que donc, nécessairement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} = 0$.)

- $f : x \mapsto \sin(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right)$, $\forall x \in [a,b]$, la formule de l'énoncé nous permet d'affirmer que :
$$|e_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
ce qui prouve la convergence uniforme vers f sur $[a,b]$ de $f(x) = \sin(x)$.

2. Comme $e_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $e_n \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$. f et P_n coïncidant en $n+1$ points, la fonction e_n admet $(n+1)$ racines. D'après le théorème de Rolle, la fonction e_n' admet n racines. On peut alors montrer, en réappliquant ce raisonnement $(n-1)$ fois, que $e_n^{(n)}$ admet une unique racine $\xi \in]a,b[$. On sait que
$$e_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!f[x_0,\ldots,x_n].$$
En effet,
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \\ &= \underbrace{f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)}_{\text{polynôme de degré } n-1} + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_n). \end{aligned}$$
donc $P_n^{(n)}(x) = (f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_n))^{(n)} = n!f[x_0,\ldots,x_n]$. En $x = \xi$,
$$e_n^{(n)}(\xi) = 0 \Leftrightarrow f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

3. D'après 2. on sait qu'il existe $\xi \in]a,b[=]\min(x_i), \max(x_i)[$ tel que $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_0,\ldots,x_n]$. Donc
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_j \to x_i \\ j \neq i}} f[x_0,\ldots,x_n] &= \lim_{\substack{x_j \to x_i \\ j \neq i}} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \\ \Leftrightarrow \qquad f[\underbrace{x_i,\ldots,x_i}_{(n+1) \text{ fois}}] &= \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!},\ i \in \{0,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

4. - $(\Rightarrow)$ Soit P un polynôme de degré $\leq n$ où $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $\exists \xi \in]\min(x_i), \max(x_i)[$ tel que
$$P[x_0,\ldots,x_{n+1}] = \frac{P^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = 0 \text{ car } d^o(P) = n.$$
   - $(\Leftarrow)$ Soit P un polynôme tel que $\forall k \geq n+1$, $\forall x_0,\ldots,x_k$ $(k+1)$ points, on a $P[x_0,\ldots,x_k] = 0$. On pose $p = d^o(P)$. Supposons $p \geq n+1$, alors
$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + \sum_{i=1}^{p} P[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \\ &= P(x_0) + \sum_{i=1}^{n} P[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{p} P[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)}_{=0 \text{ par hypothèse}} \end{aligned}$$
et on déduit que $d^o(P) \leq n$.

Exercice 6 *Correction* :

1. - Montrons que T_{n-1} et T_n sont des polynômes, ceci par récurrence.
     - T_0 et T_1 sont des polynômes de degrés respectifs 0 et 1. En effet, $T_0(t) = 1$ et $T_1(t) = 1$.
     - On suppose que T_{n-1} et T_n sont des polynômes de degrés respectifs $n-1$ et n.
     - $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$ donc T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ (et T_n est de degré n).
   - On montre aisément par récurrence que le coefficient de plus haut degré de T_n est 2^{n-1}. En effet,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \\ &= 2t(2tT_{n-2}(t) - T_{n-3}(t)) - T_{n-2}(t) \\ &\ \ \vdots \\ &= 2^{n-1}t^{n-1}T_1(t) + \text{polynôme de degré } n-2 \end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que $T_{n-1}(t) = \cos((n-1)\arccos(t))$ et $T_n(t) = \cos(n\arccos(t))$.
   - $T_0(t) = 1 = \cos(0 \times \arccos(t)) = \cos(0)$ et $T_1(t) = t = \cos(\arccos(t))$ puisque $t \in [-1;1]$.
   - Supposons que $T_{n-1}(t) = \cos((n-1)\arccos(t))$ et $T_n(t) = \cos(n\arccos(t))$.
   - $t \in [-1;1] \Rightarrow \exists\theta \in [0,\pi]$, $\begin{cases} \theta = \arccos(t) \\ t = \cos(\theta) \end{cases}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(t) &= 2t\cos(n\arccos(t)) - \cos((n-1)\arccos(t)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos(n\theta+\theta) + \cos(n\theta-\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{aligned}$$

3. $\forall t \in [-1;1]$, $|T_n(t)| \leq 1$.
   - L'équation $T_n(t) = 0$, $t \in [-1;1]$ implique $n\arccos(t) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Les racines de T_n sont dans $[-1;1]$ et sont données par :

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \text{ où } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

     (En effet, la relation $\arccos(\cos(t)) = t$ est vraie si et seulement si $t \in [0,\pi]$ d'où la condition sur k.)
     On en déduit donc que T_n possède n zéros réels notés $(t_k)_{k\in\{0,\ldots,n-1\}}$.
   - Les points extrémums de T_n sur $[-1;1]$ sont les points pour lesquels $|T_n(t)| = 1$ soit

$$\begin{aligned} &n\arccos(t) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\quad & t'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k \in \{0,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

4. On pose $\begin{cases} x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2} \\ t \in [-1;1],\ x \in [a,b] \end{cases}$. On a alors $x_k = \dfrac{b-a}{2}t_k + \dfrac{b+a}{2}$.

5. Soit $\in \mathcal{C}^{n+1}[a;b]$, P_n le polynôme interpolant f aux points de Tchebycheff $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$ tels que

$$x_k = \frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2} \text{ et } t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)\pi}\right),\ k \in \{0,\ldots,n\}.$$

   On sait qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)f^{(n+1)}(\xi).$$

   Comme $x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2}$, $x - x_k = \dfrac{b-a}{2}(t-t_k)$ et

$$\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)$$

   or $T_{n+1}(t) = 2^n\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)$ d'après les questions 1. et 3. donc

$$\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}T_{n+1}(t).$$

   Mais $|T_{n+1}(t)| \leq 1$ donc $\forall x \in [a,b]$, on a

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_n(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}}$$

   avec $M_n = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

6. Soit $\tilde{T}_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}T_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)$ avec $\displaystyle\max_{t\in[-1;1]}|\tilde{T}_{n+1}(t)| = \frac{1}{2^n}$ car $\displaystyle\max_{t\in[-1;1]}|T_{n+1}(t)| = 1$. Montrer que la majoration est optimale revient à montrer que quel que soit le choix des points $s_0,\ldots,s_n$ sur $[-1;1]$ on a

$$\max_{t\in[-1;1]}|\prod_{k=0}^{n}(t-s_k)| \geq \max_{t\in[-1;1]}|\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)|.$$

   On suppose qu'il existe $s_0,\ldots,s_n \in [-1;1]$ $((s_i) \neq (t_i))$ tels que

$$\max_{t\in[-1;1]}|\prod_{k=0}^{n}(t-s_k)| < \max_{t\in[-1;1]}|\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)| = \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Soit P défini par $P(t) = \prod_{k=0}^{n}(t - s_k)$, l'inégalité (1) implique que $\max_{t\in[-1;1]} |P(t)| < \frac{1}{2^n}$. On pose

$$r(t) = \tilde{T}_{n+1}(t) - P(t) \text{ où } d^o(r) \leq n.$$

Pour $k = 0, \ldots, n+1$, on a $r(t'_k) = \frac{(-1)^k}{2^n} - P(t'_k)$. Par hypothèse, $|P(t'_k)| < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\frac{1}{2^n} < P(t'_k) < \frac{1}{2^n}$. $r(t'_k)$ change alternativement de signe $(n+1)$ fois et r est continue (en tant que polynôme) donc r a au moins $(n+1)$ racines. Comme $d^o(r) \leq n$, on a $r \equiv 0$. Par suite, $s_k = t_k$, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, ce qui est absurde donc (1) est fausse.

Exercice 7 *Correction* :

1. H est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. $\exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$,
$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$
On sait qu'il existe un unique polynôme de degré 3 qui satisfait les 4 conditions d'Hermite :
 - $H(0) = f(0) = a_0$
 - $H(1) = f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$
 - $H'(0) = f'(0) = a_1$
 - $H'(1) = f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

 On souhaite donc résoudre le système
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f'(0) \\ f'(1) \end{pmatrix} \tag{2}$$
Comme le déterminant de la matrice précédente est non nul (égal à -1), le système (2) admet une solution unique d'où l'existence et l'unicité du polynôme H.
On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc
$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f'(0) \\ f'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ -3f(0) + 3f(1) - 2f'(0) - f'(1) \\ 2f(0) - 2f(1) + f(0) + f(1) \end{pmatrix}.$$
Finalement,
$$H(x) = f(0) + f'(0)x + (-3f(0) + 3f(1) - 2f'(0) - f'(1))x^2 + (2f(0) - 2f(1) + f'(0) + f'(1))x^3.$$

2. On écrit
$$P(x) = \sum_{k=0}^{1} H_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{1} K_k(x) f'(x_k)$$
avec $H_k(x) = (1 - 2(x - x_k)L'_k(x_k))L_k^2(x)$ et $K_k(x) = (x - x_k)L_k^2(x)$. Puisque
 - $H_0(x) = (1 + 2x)(x - 1)^2$,
 - $H_1(x) = (1 - 2(x - 1))x^2$,
 - $K_0(x) = x(x - 1)^2$,
 - $K_1(x) = (x - 1)x^2$,

 on obtient :
$$P(x) = (1 + 2x)(x - 1)^2 f(0) + (3 - 2x)x^2 f(1) + x(x - 1)^2 f'(0) + (x - 1)x^2 f'(1).$$

3. Si $x \neq 0, 1$, on pose $F(t) = R(t) - t^2(t - 1)^2 S(x)$ où $R(x) = f(x) - H(x)$ et $f \in \mathcal{C}^4([0, 1])$. On a donc $F(0) = F(1) = F(x) = 0$. D'après Rolle, $\exists \xi_0, \xi_1 \in]0, 1[$, $F'(\xi_0) = F'(\xi_1) = 0$. Mais on a également $F'(0) = F'(1) = 0$ soit au total 4 racines de F'. En appliquant Rolle successivement 3 fois, $F^{(4)}$ admet une unique racine qu'on appelle ξ. Ainsi, comme
$$F^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \underbrace{H^{(4)}(t)}_{=0} - 4! S(x).$$
On pose ensuite $t = \xi$ et on obtient

$$F^{(4)}(\xi) = 0 \Leftrightarrow S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

4. On pose $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_1 = x_0$, $\tilde{x}_2 = x_1$, $\tilde{x}_3 = x_1$. On considère la base de Newton $\{N_0(x) = 1, N_1(x) = x, N_2(x) = x^2, N_3(x) = x^2(x-1)\}$ et on construit

$$P(x) = f(\tilde{x}_0) + \sum_{k=1}^{2n+1} f[\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_k] N_k(x)$$

soit ici

$$\begin{array}{rrcl} & P(x) & = & f(x_0) + f[x_0, x_0]x + f[x_0, x_0, x_1]x^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1]x^2(x-1) \\ \Leftrightarrow & P(x) & = & f(0) + f[0,0]x + f[0,0,1]x^2 + f[0,0,1,1]x^2(x-1) \\ \Leftrightarrow & P(x) & = & \underbrace{f(0)}_{a_0} + \underbrace{f'(0)}_{a_1} x + \underbrace{f[0,0,1]}_{a_2} x^2 + \underbrace{f[0,0,1,1]}_{a_3} x^2(x-1). \end{array}$$

On détermine les coefficients a_j, pour $j = 0, 1, 2, 3$, en fonction des différences divisées à arguments répétés de f :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & f(0) & & & \\ 0 & f(0) & f'(0) & & \\ 1 & f(1) & f[0,1] & \dfrac{f[0,1] - f'(0)}{1-0} & \\ 1 & f(1) & f'(1) & \dfrac{f'(1) - f[0,1]}{1-0} & \dfrac{f'(1) - 2f[0,1] + f'(0)}{1-0}. \end{array}$$

5. On sait que $R(x) = f[x, x_0, x_0, x_0, x_1] \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)^2 = f[x, 0, 0, 1, 1]x^2(x-1)^2$ et, d'après la question 2. de l'exercice 5, il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$f[x, 0, 0, 1, 1] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

En utilisant le fait que $R(x) = x^2(x-1)^2 S(x)$, on retrouve bien le résultat de la question 3.

6. Hors cours.