Analyse Numérique

Fiche 2 - Interpolation polynomiale.

Exercice 1 Montrer que le déterminant de Vandermonde vérifie :

$$V_{n+1}(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Exercice 2 Soit le polynôme $P(x) = 1 - x + x^2$.

1. Décomposer P dans la base de Lagrange relative aux points : $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. Même question, par rapport à la base de Newton.

Exercice 3 On considère la fonction intégrale, $I(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{[1 - (\sin k)^2 \sin^2 x]^{1/2}}$.
Donner une valeur approchée de $I(3,5)$, sachant que :

$$I(1) = 1,5709,\ I(4) = 1,5727 \text{ et } I(6) = 1,5751,$$

1. en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange,
2. en utilisant la formule de Newton.

Exercice 4 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$. Considérons la subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de $n+1$ points distincts de $[a; b]$. Montrer que les polynômes $(L_i)_{0 \le i \le n}$ de la base de Lagrange associée vérifient les relations suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^k}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}} (x_i - x_j)} = \delta_{k,n}$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^j L_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 0 \\ 0 \text{ si } 1 \le j \le n \end{cases}$

d) $\displaystyle f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}} (x_i - x_j)}.$

Exercice 5 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}[a; b]$ et P_n le polynôme interpolant f en $n+1$ points $x_0, \dots, x_n$ appartenant à $[a; b]$. On sait que : $\exists \xi \in [\min(x, \min_k x_k); \max(x, \max_k x_k)]$ tel que :

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi).$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$ lorsque $f(x) = e^x$ ou $f(x) = \sin x$.
2. Montrer que : $\exists \xi \in [a; b]$ tel que $f[x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.
3. Montrer que $f[\underbrace{x, \dots, x}_{(n+1)\text{fois}}] = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$.
4. Montrer que les différences divisées d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré $\le n$ sont toutes nulles. Réciproque ?

Exercice 6 Soit T_n la suite de fonctions données pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ pour } n \ge 1.$$

1. Montrer que T_n est un polynôme. Quels sont son degré et son coefficient du plus haut degré ? (Polynômes de Tchebychev).
2. Montrer que pour tout réel $t \in [-1;1]$, on a $T_n(t) = \cos(n \text{Arc} \cos t)$ $(n \geq 0)$.
3. Montrer que le polynôme T_n possède n zéros réels notés $(t_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ et $n+1$ points extrémums notés $(t'_k)_{k=0,\ldots,n}$ sur l'intervalle $[-1;1]$. Les zéros $(t_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ de T_n sont appelés points de Tchebychev sur $[-1;1]$.
4. Effectuer un changement de variable pour ramener $[-1;1]$ à un intervalle $[a;b]$ donné. Écrire les points de Tchebychev sur l'intervalle $[a;b]$.
5. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^{n+1}[a;b]$ et P_n le polynôme interpolant f aux points de Tchebychev de l'intervalle $[a;b]$. Montrer la majoration
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_n(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \text{ où } M_n = \sup_{x\in[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$
6. Montrer que la majoration ci-dessus est optimale parmi tous les choix possibles de points d'interpolation.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, et soit H le polynôme d'interpolation cubique de Hermite aux points 0 et 1, c'est-à-dire le polynôme H de degré ≤ 3 vérifiant :
$$H(0) = f(0),\ H(1) = f(1),\ H'(0) = f'(0) \text{ et } H'(1) = f'(1).$$

1. Montrer qu'un tel polynôme existe et est unique.
2. Écrire ce polynôme à l'aide des polynômes de la base de Lagrange.
3. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et on se propose d'estimer l'erreur $R(x) = f(x) - H(x)$. Pour tout x différent de 0 et de 1, on pose
$$F(t) = R(t) - t^2(t-1)^2 S(x)$$
où l'on choisit $S(x)$ de façon que F s'annule en $t = x$. Montrer qu'il existe un $\xi \in]0;1[$ tel que
$$S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$
4. Montrer que H admet une représentation de Newton du type
$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2(x-1).$$
Donner les coefficients a_j pour $j = 0, \ldots, 3$ en fonction des différences divisées à arguments éventuellement répétés de f. Écrire la table de l'algorithme de Newton correspondante.
5. Retrouver le résultat de la question 3., en utilisant les différences divisées.
6. Soit $f \in \mathcal{C}^4[a;b]$ et soit
$$h = \frac{b-a}{n},\ x_j = a + jh,\ 0 \leq j \leq n.$$
Soit g la fonction polynomiale telle que $g|_{[x_j;x_{j+1}]}$ soit l'interpolant cubique de Hermite de $f|_{[x_j;x_{j+1}]}$.
– Quelle est la classe de g ?
– Évaluer $\max_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|$ en fonction de h et de $\max_{x\in[a;b]} |f^{(4)}(x)|$.