Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 3 - Polynômes orthogonaux.

Exercice 1 *Correction* :

1. On choisit $i < j$ et on obtiendrait par symétrie un résultat analogue lorsque $j < i$.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} D^i[(x^2-1)^i]D^j[(x^2-1)^j]dx \\
= & -\int_{-1}^{1} D^{i+1}[(x^2-1)^i]D^{j-1}[(x^2-1)^j]dx + \underbrace{\left[D^i[(x^2-1)^i]D^{j-1}[(x^2-1)^j]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall k\in\{0,1,\ldots,j-1\}} \\
= & \ \ldots \\
= & \ (-1)^j \int_{-1}^{1} D^{i+j}[(x^2-1)^i]D^0[(x^2-1)^j]dx + \underbrace{\left[D^{i+j-1}[(x^2-1)^i]D^0[(x^2-1)^j]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall k\in\{0,1,\ldots,j-1\}} \\
= & \ (-1)^j \int_{-1}^{1} \underbrace{D^{i+j}[(x^2-1)^i]}_{=0 \text{ car si } i<j,\ D^{i+j}[(x^2-1)^i]=0} (x^2-1)^j dx \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

2. Un calcul explicite de P_n à l'aide de la formule de Leibniz fournit :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}\frac{n!}{j!}(x+1)^j = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j.$$

Et, il s'ensuit que $P_n(1) = 1$.

3. On a $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j$, d'où on déduit

$$P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2\left(\frac{2x}{1-x}\right)^{n-j}\left(\frac{2}{1-x}\right)^j = \frac{1}{(1-x)^n}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2x^{n-j}.$$

4. Immédiat car le polynôme W_n défini par $W_n(x) = (x^2-1)^n$ est pair. Donc, il existe $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $W_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$, ce qui induit que P_n, qui est le polynôme dérivé n fois de W_n à une constante près, est un polynôme de même parité que n.

5. P_n' se décompose de la manière suivante : $P_n' = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} b_k P_k$ où $b_k \in \mathbb{R}$.

(En effet, P_n' est un polynôme de degré $n-1$ et $\{P_0,\ldots,P_{n-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il est très simple de démontrer ce dernier point. $\dim\{P_0,\ldots,P_{n-1}\} = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ et la famille est libre :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i(x) = 0 \Rightarrow \forall j \in \{0,\ldots,n-1\},\ \int_{-1}^{1} P_j(x)\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i(x)dx = 0 \Rightarrow \alpha_j\int_{-1}^{1}P_j(x)^2dx = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.)$$

Par conséquent, pour $j \in \{0,\ldots,n-1\}$,

$$\int_{-1}^{1}P_n'(x)P_j(x)dx = \int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{n-1}b_kP_k(x)P_j(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}b_k\int_{-1}^{1}P_k(x)P_j(x)dx \underset{1.}{=} b_j\int_{-1}^{1}P_j^2(x)dx.$$

Par ailleurs,

$$\int_{-1}^{1}P_n'(x)P_j(x)dx = \underbrace{-\int_{-1}^{1}P_n(x)P_j'(x)dx}_{=0 \text{ car } d^o(P_j')<n} + \underbrace{[P_n(x)P_j(x)]_{-1}^{1}}_{=1-(-1)^{n+j} \text{ car } P_n \text{ est de la parité de } n \text{ et } P_n(1)=1}$$

6. $P_0(x) = 1$ car P_0 est de degré 0 et tel que $P_0(1) = 1$.
$P_1(x) = x$ car P_1 est de degré 1, impair et tel que $P_1(1) = 1$.
On a encore
$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_nP_{n-1}(x).$$
En effet, P_{n+1} étant un polynôme de degré $n+1$, $(1, x, \ldots, x^{n+1})$ désignant une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et
$$\mathrm{Vect}\{xP_n(x), P_n(x), P_{n-1}(x), P_{n-2}(x), \ldots, P_0(x)\} = \mathrm{Vect}\{x^{n+1}, x^n, \ldots, x, 1\},$$
on peut écrire
$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_nP_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} a_jP_j(x). \tag{1}$$
(On peut justifier autrement l'expression (1) : on a $P_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)}x^k$ et $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}x^k$ donc
$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= a_0^{(n+1)} + \ldots + a_n^{(n+1)}x^n + a_{n+1}^{(n+1)}x^{n+1} \\
&= a_0^{(n+1)} + \ldots + a_n^{(n+1)}x^n + \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}(xP_n(x) - x\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)}x^k) \\
&= \underbrace{\frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}}_{A_n} xP_n(x) + (a_n^{(n+1)} - \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}a_{n-1}^{(n)})x^n + a_0^{(n+1)} + \ldots + a_{n-1}^{(n+1)}x^{n-1} - \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}x\sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(n)}x^k.
\end{aligned}$$
Comme $x^n = \dfrac{1}{a_n^{(n)}}(P_n(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_n^{(k)}x^k)$, on a
$$P_{n+1}(x) = \underbrace{\frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}}_{A_n} xP_n(x) + \underbrace{\frac{1}{a_n^{(n)}}(a_n^{(n+1)} - \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}a_{n-1}^{(n)})}_{B_n} P_n(x) - \frac{1}{a_n^{(n)}}(a_n^{(n+1)} - \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}a_{n-1}^{(n)})\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)}x^k$$
$$+a_0^{(n+1)} + \ldots + a_{n-1}^{(n+1)}x^{n-1} - \frac{a_{n+1}^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}x\sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(n)}x^k$$
et on construit ainsi de suite l'expression (1)).

On multiplie ensuite chaque terme de (1) par $P_k(x)$ et on intègre entre -1 et 1 :
$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_k(x)dx = \int_{-1}^{1}(B_n + xA_n)P_n(x)P_k(x)dx + C_n\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_k(x)dx + \sum_{j=0}^{n-2} a_j\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)dx,$$
et, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, cela fournit $a_k\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx = 0$ puis $a_k = 0$ car $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx \neq 0$.
- Recherche de A_n : Soit a_n le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
$$a_nx^n = \frac{1}{2^nn!}D^n[x^{2n}] = \frac{1}{2^nn!}\frac{(2n)!}{n!}x^n$$
Or, $A_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ car $\mathrm{dom}(P_{n+1}(x)) = \mathrm{dom}(xA_nP_n(x)) \Leftrightarrow A_n = \dfrac{\mathrm{dom}(P_{n+1}(x))}{\mathrm{dom}(xP_n(x))}$. Donc $A_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.
- Recherche de B_n : Utilisons les caractéristiques de parité de P_n :
$$P_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(x) = (B_n - xA_n)(-1)^nP_n(x) + C_n(-1)^{n-1}P_{n-1}(x).$$
- Si n est pair, on a $P_{n+1}(x) + P_{n+1}(-x) = 0 = 2B_nP_n(x) \Leftrightarrow B_n = 0$.
- Si n est impair, on a $P_{n+1}(x) - P_{n+1}(-x) = 0 = 2B_nP_n(x) \Leftrightarrow B_n = 0$.
- Recherche de C_n : On a $P_n(1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc, $1 = A_n + C_n$. Puis, $C_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

7. D'après la relation de recurrence à trois termes, on obtient
$$0 = (n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0} - (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx,$$
$$0 = (n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}^2(x)dx - (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx + n\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx}_{=0}.$$

De la troisième égalité, on déduit
$$n\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx-(2n-1)\int_{-1}^{1}xP_{n-1}(x)P_n(x)dx=0.$$
De la première égalité,
$$-(2n+1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx+n\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx=0.$$
Ainsi,
$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx=0.$$
Par récurrence, il vient
$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{1}{2n+1}\underbrace{\int_{-1}^{1}P_0^2(x)dx}_{=2}=\frac{2}{2n+1}.$$

8. Soit $G_n(z)=\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^n$. En dérivant,
$$\begin{aligned}G_n'(z)&=\sum_{n\geq 1}nP_n(x)z^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)P_{n+1}(x)z^n=\sum_{n\geq 1}(n+1)P_{n+1}(x)z^n+x\\&=\sum_{n\geq 1}[(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)]z^n+x=\sum_{n\geq 1}(2n+1)xP_n(x)z^n-\sum_{n\geq 1}nP_{n-1}(x)z^n+x\\&=2\sum_{n\geq 1}nxP_n(x)z^n+\sum_{n\geq 1}xP_n(x)z^n-\sum_{n\geq 1}nP_{n-1}(x)z^n+x.\end{aligned}.$$
Par ailleurs,
- $2xzG_n'(z)=2\sum_{n\geq 1}nxP_n(x)z^n$,
- $xG_n(z)-x=x\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^n-x=\sum_{n\geq 1}xP_n(x)z^n$,
- $zG_n(z)=\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^{n+1}=\sum_{n\geq 1}P_{n-1}(x)z^n$ et
- $$\begin{aligned}z^2G_n'(z)&=z^2\sum_{n\geq 1}nP_n(x)z^{n-1}=\sum_{n\geq 1}nP_n(x)z^{n+1}=\sum_{n\geq 2}(n-1)P_{n-1}(x)z^n\\&=\sum_{n\geq 2}nP_{n-1}(x)z^n-\sum_{n\geq 2}P_{n-1}(x)z^n=\sum_{n\geq 1}nP_{n-1}(x)z^n-z-\sum_{n\geq 1}P_{n-1}(x)z^n+z\\&=\sum_{n\geq 1}nP_{n-1}(x)z^n-zG_n(z).\end{aligned}$$

Il s'ensuit
$$\begin{aligned}(1-2xz+z^2)G_n'(z)&=x\sum_{n\geq 0}(2n+1)P_n(x)z^n-\sum_{n\geq 1}nP_{n-1}(x)z^n-2x\sum_{n\geq 1}nP_n(x)z^n+\sum_{n\geq 2}(n-1)P_{n-1}(x)z^n\\&=x\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^n-P_0(x)z-\sum_{n\geq 2}P_{n-1}(x)z^n=x\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^n-\sum_{n\geq 1}P_{n-1}(x)z^n\\&=(x-z)G_n(z)\end{aligned}$$
On est donc ramené à la résolution de l'équation différentielle
$$\frac{G_n'(z)}{G_n(z)}=\frac{x-z}{1-2xz+z^2}=-\frac{u'(z)}{2u(z)},$$
avec $u(z)=1-2xz+z^2$. Ainsi, $G_n(z)=\dfrac{a}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$. Or $P_n(1)=1$ donc, lorsque $x=1$, $G_n(z)=\dfrac{1}{1-z}$, ce qui donne $a=1$. Pour conclure,
$$G_n(z)=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Correction* :

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $l_n=(X^2-1)^n$ de sorte que $L_n=l_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car l_n est de degré $2n$.
   (a) Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et $P\in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n)}(x)P(x)dx = [(l_n)^{(n-1)}(x)P(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n-1)}(x)P'(x)dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme l_n et donc, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $l_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(l_n)^{(k)}$ pour $k \in \{0, n-1\}$. Donc

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n-1)}(x)P'(x)dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in \{0, n-1\}$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left([l_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)dx \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} (l_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} l_n^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} l_n(x)P^{(n)}(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)dx. \tag{2}$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$ et on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)dx.$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \le p < n$. Puisque $deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que la famille $(L_k)_{0 \le k \le n}$ est une base orthogonale de l'espace $(\mathbb{R}[X], (.|.))$.

(b) On applique maintenant la formule (2) dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n L_n^{(n)}(x)dx = 2 \times (2n)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx = 2 \times (2n)! \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2(t))^n(-\sin(t))dt \\ &= 2 \times (2n)! \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt = 2 \times (2n)! W_{2n+1} \text{ (intégrales de Wallis).}\end{aligned}$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \dfrac{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots 3} W_1 = \dfrac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!} \times 2 \times (2n)! = \frac{2^{2n+1} n!^2}{2n+1},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} 2^n n!.$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \dfrac{1}{2^n n!} L_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X], (.|.))$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \dfrac{1}{2^n n!} ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

2. La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n, $n \in \mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$

$$(P_n|X^n) = \frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)} ((P_n)|\mathrm{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)} (P_n|P_n)$$

car $P_n \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1})^\perp = \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. Ceci montre que $(P_n|X^n) > 0$. Par unicité, l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille des polynômes de Legendre

$$\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((X^2-1)^n)^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On a utilisé le

Théorème 0.1 *(orthonormalisation de Gram-Schmidt)*
Pour toute famille libre $(x_i)_{1 \le i \le p}$ dans E, il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{1 \le i \le p}$ dans E telle que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ \begin{cases} Vect\{e_1, \dots, e_k\} = Vect\{x_1, \dots, x_k\}. \\ (x_k|e_k) > 0 \end{cases}$$

Exercice 3 *Correction* :

1. La formule trigonométrique
$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
avec $p=(n+1)\Theta$ et $q=(n-1)\Theta$ fournit immédiatement le résultat.
2. Une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes induit que les fonctions T_n sont des fonctions polynômes.
3. $$\frac{dT_n(x)}{dx}=\frac{dT_n(x)}{d\Theta\frac{dx}{d\Theta}}=n\frac{\sin(n\Theta)}{\sin(\Theta)}.$$
4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes en tant que dérivées de fonctions polynômes.
5. $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int_{\pi}^{0}\cos(n\Theta)\cos(m\Theta)d\Theta \text{ avec } \Theta=\arccos(x)\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((n+m)\Theta)+\cos((n-m)\Theta))d\Theta=0 \text{ car } n\neq m\end{aligned}$$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((2n)\Theta)+\cos((0)\Theta)d\Theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}d\Theta=\frac{\pi}{2}.$
7. Soit $Z_n(x)=\dfrac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$, pour $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
On a $Z_0(x)=1$ et $Z_1(x)=x$. De plus,
$$\begin{aligned}&Z_{n-1}(x)+Z_{n+1}(x)\\ &= \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)+(x-\sqrt{x^2-1})^n\left(x-\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1}\right)+(x-\sqrt{x^2-1})^n\left(x-\sqrt{x^2-1}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}\right)\right]\\ &= 2x\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\right]=2xZ_n(x).\end{aligned}$$
Ainsi, les fonctions Z_n vérifient la même relation de récurrence à trois termes que les T_n, ce qui implique
$$Z_n=T_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$
8. C'est immédiat par une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes.
9. On a $T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$, $T_n'(x)=\sin(n\arccos(x))\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ et
$$T_n''(x)=\cos(n\arccos(x))-\frac{-n^2}{1-x^2}+\sin(n\arccos(x))\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}.$$
Et, le résultat découle directement.
10. Soit $k<n$,
$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}W_n(x)x^k\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \int_{-1}^{1}D^n\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]x^kdx\\ &= -\int_{-1}^{1}D^{n-1}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right](kx^{k-1})dx+\underbrace{\left[D^{n-1}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]x^k\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}}\\ &= \dots\\ &= (-1)^k\int_{-1}^{1}D^{n-k}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right](k!)dx+(-1)^{k-1}\underbrace{\left[D^{n-k}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right](k!x)\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k k! \int_{-1}^{1} D^{n-k}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx \\
&= (-1)^k k! \underbrace{\left[D^{n-k-1}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout polynôme p de degré strictement inférieur à n,

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)p(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

En particulier, pour $p(x) = W_k(x)$ où $k < n$ car il est évident que W_k est un polynôme. Ainsi, les polynômes W_n sont orthogonaux pour le même produit scalaire que les polynômes T_n. Il s'ensuit que ces polynômes sont proportionnels.

Exercice 4 *Correction* :

1. – Soit $(P,Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \bigcirc\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \bigcirc\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.
   - La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

   $$\begin{aligned}
   \varphi(P,P) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \\
   &\Rightarrow \quad \forall t \in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
   &\Rightarrow \quad \forall t \in]-1,1[,\ P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}
   \end{aligned}$$

   Ainsi, l'application φ est définie et finalement l'application φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En posant $t = \cos(\theta)$, on obtient

   $$\varphi(T_n, T_p) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^{0} \frac{T_n\cos(\theta)T_p\cos(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}(-sin(\theta)) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(p\theta)d\theta.$$

   Si de plus, $n \neq p$,

   $$\varphi(T_n, T_p) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((n+p)\theta) + \cos((n-p)\theta))d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0.$$

   Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $deg(T_n) = n$ et on a donc montré que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand $p = n$, la formule précédente fournit

   $$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta))d\theta = \begin{cases} \pi \text{ si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } n \geq 1 \end{cases},$$

   et donc

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} \text{ si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}.$$

Exercice 5 *Correction* :

1. Après avoir dérivé deux fois

$$L_n^{\alpha}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

le calcul de $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$ nous donne

$$\begin{cases} na_0 + (\alpha+1)a_1 = 0, \text{ (terme constant)} \\ k(k+1)a_{k+1} - ka_k + (\alpha+1)(k+1)a_{k+1} + na_k = 0, \text{ (terme en } x_k\text{, pour } k \text{ variant de 1 à } n-1 \text{ et avec } a_n = 1) \\ -na_n + na_n = 0, \text{ (terme dominant)} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-n}{(k+1)(\alpha+k+1)}, \forall k \in \{0,\dots,n-1\}$$

car la deuxième relation est aussi vraie pour $k=0$. Comme $a_n = 1$ et $a_k = \dfrac{(k+1)(\alpha+k+1)}{k-n} a_{k+1}$, $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, on déduit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{[(k+1)(k+2)\dots(n)][(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)]}{(k-n)(k+1-n)\dots(n-1-n)}, \\ &= (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\ &= C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \ \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}. \end{aligned}$$

2. Il est évident que $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha+1)$. Comme le polynôme L_n^α est unitaire et de degré n, on a :

$$L_{n+1}^\alpha(x) = xL_n^\alpha(x) + A_n L_n^\alpha(x) + B_n L_{n-1}^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-2} L_k^\alpha(x) b_k$$

où les $(b_k)_{k\in\{0,1,\dots,n-2\}}$, A_n et B_n sont déterminés de façon unique. On pose

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k,$$

avec $a_k^{(n)} = (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)]$, $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ et $a_n^{(n)} = 1$. On déduit en remplaçant dans l'égalité précédente que

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^{k+1} + A_n \sum_{k=0}^{n} x^k + B_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n-1)} x^k + \sum_{l=0}^{n-2} b_l \sum_{k=0}^{l} a_k^{(l)} x^k \ (\star).$$

- Recherche de A_n. Le terme en x^n de l'égalité $(\star)$ donne
  $0 = -a_n^{(n+1)} + A_n a_n^{(n)} + a_{n-1}^{(n)} \Leftrightarrow 0 = (n+1)(\alpha+n+1) + A_n - n(\alpha+1) \Leftrightarrow A_n = -\alpha - 2n - 1.$
- Recherche de B_n. Le terme en x^{n-1} de l'égalité $(\star)$ donne

$$\begin{aligned} & 0 = -a_{n-1}^{(n+1)} + A_n a_{n-1}^{(n)} + a_{n-2}^{(n)} + B_n a_{n-1}^{(n-1)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = -\frac{n(n+1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{2} - (-\alpha-2n-1)(n)(\alpha+n) + \frac{(n-1)n(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{2} + B_n \\ \Leftrightarrow\ & B_n = -n(\alpha+n). \end{aligned}$$

- Recherche des b_k. On montre de façon directe que $b_k = 0$, pour $k \in \{0,1,\dots,n-2\}$. On pose $C_k^{(n)} = \sum_{j=k}^{n-2} b_j a_k^{(j)}$, pour $k \in \{0,1,\dots,n-2\}$.
  - Le terme en x^k de l'égalité $(\star)$ donne, pour $k \in \{1,2,\dots,n-2\}$,

$$\begin{aligned} & 0 = -a_k^{(n+1)} + A_n a_k^{(n)} + a_{k-1}^{(n)} + B_n a_k^{(n-1)} + C_k^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = C_{n+1}^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n+1)] + (-\alpha-2n-1) C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\ & -C_n^{k-1}[(\alpha+k)(\alpha+k+1)\dots(\alpha+n)] - (-n(\alpha+n)) C_{n-1}^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n-1)] + C_k^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] + \frac{n+1}{n+1-k}(\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) \\ & -\frac{k}{n+1-k}(\alpha+k) + (n-k) + C_k^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & C_k^{(n)} = 0, \ \forall k \in \{1,\dots,n-2\} \end{aligned}$$

  Comme $C_{n-2}^{(n)} = b_{n-2} a_{n-2}^{(n-2)} = 0$, on en déduit que $b_{n-2} = 0$. De $C_{n-3}^{(n)} = b_{n-3} a_{n-2}^{(n-3)} + b_{n-2} a_{n-2}^{(n-2)} = 0$, on déduit $b_{n-3} = 0$ et on procède de même pour les autres b_k où $k \in \{1,\dots,n-4\}$.
  - Le terme constant de l'égalité $(\star)$ donne

$$\begin{aligned} & 0 = -a_0^{(n+1)} + A_n a_0^{(n)} + B_n a_0^{(n-1)} + C_0^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = C_{n+1}^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)] + (-\alpha-2n-1) C_n^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)] \\ & -(-n(\alpha+n)) C_{n-1}^0 [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)] + C_0^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = [(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)]((\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) + n) + C_0^{(n)} \\ \Leftrightarrow\ & C_0^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

  Comme $C_0^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-2} b_j a_0^{(j)} = b_0 a_0^{(0)}$, on en déduit que $b_0 = 0$.

3. Par définition, $xL_n''^\alpha(x) + (\alpha+1-x)L_n'^\alpha(x) + nL_n^\alpha(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
D[L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] &= L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} + L_m^\alpha(x)L_n''^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\
&\quad +(\alpha+1)L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} - L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\
&= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}[(\alpha+1-x)L_n'^\alpha(x) + xL_n''^\alpha(x)] + x^{\alpha+1}e^{-x}L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) \\
&= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}[-nL_n^\alpha(x)] + x^{\alpha+1}e^{-x}L_m'^\alpha(x)L_n'^\alpha(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D[(L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) - L_m'^\alpha(x)L_n^\alpha(x))x^{\alpha+1}e^{-x}] &= L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}[-nL_n^\alpha(x)] - L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}[-mL_m^\alpha(x)] \\
&= (m-n)x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x) \\
&= L_m^\alpha(x)D[L_n'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}] - L_n^\alpha(x)D[L_m'^\alpha(x)x^{\alpha+1}e^{-x}].
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$(m-n)\int_0^{+\infty} L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = \left[(L_m^\alpha(x)L_n'^\alpha(x) - L_m'^\alpha(x)L_n^\alpha(x))x^{\alpha+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0.$$

Ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = 0$ si $n \neq m$.

4. Depuis la formule de récurrence à trois termes, on tire

$$\int_0^{+\infty} L_{n+1}^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xL_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx,\ \forall n \geq 0$$

car la formule de récurrence à trois termes peut être étendue au cas $n = 0$ en convenant $L_{-1}^\alpha(x) = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} xL_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = n(\alpha+n)\int_0^{+\infty} L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx,\ \forall n \geq 1.$$

On déduit alors

$$\int_0^{+\infty} L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = n(\alpha+n)\int_0^{+\infty} L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx,\ \forall n \geq 1.$$

Puis, par une récurrence simple,

$$\int_0^{+\infty} L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = \underbrace{n!(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}_{=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}}\underbrace{\int_0^{+\infty} L_0^\alpha(x)L_0^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx}_{=\Gamma(\alpha+1)}.$$

Le résultat

$$\int_0^{+\infty} (L_n^\alpha)^2(x)e^{-x}dx = n!\Gamma(\alpha+n+1)$$

est alors immédiat.

Exercice 6 *Correction* :

1. On montre ce résultat par récurrence sur n.
Pour $w = 0$, $H_0(x) = e^{2x0-0^2} = 1$ et est un polynôme de degré 0.

$$\frac{dG(x,w)}{dx} = 2we^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}H_n'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{w^n}{n!}H_n'(x).$$

Et, d'autre part,

$$2we^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{2w^{n+1}}{n!}H_n(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{2w^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x).$$

Ainsi, en identifiant les termes en w^n, on obtient

$$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x).$$

Et, par une récurrence simple, H_n est un polynôme de degré n.

2. Immédiat.

3.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,w)G(x,\overline{w})e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xw-w^2+2x\overline{w}-\overline{w}^2-x^2}dx \\
&= e^{2w\overline{w}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-w-w)^2}dx = e^{2w\overline{w}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}dx \text{ avec } u = x-w-\overline{w} \\
&= \sqrt{\pi}e^{2w\overline{w}}
\end{aligned}$$

4. La précédente propriété donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{m!} H_m(x) \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!} H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2w\overline{w}}$. Ainsi
$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx \right) w^n = \sqrt{\pi} e^{2w\overline{w}} = \sqrt{\pi} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2^n}{n!} \overline{w}^n \right) w^n.$$
En poursuivant,
$$\sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n \overline{w}^n.$$
Ainsi, si $n \neq m$, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$.
5. Immédiat.
6. $\frac{dG(x,w)}{dw} = 2(x-w)e^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!} H_{n+1}(x)$.
Et, d'autre part,
$$\begin{aligned} 2(x-w)e^{2xw-w^2} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 0} \frac{2w^{n+1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{2w^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x) \end{aligned}$$
D'où,
$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$
pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2xH_0(x) = 2x$.
7. Par récurrence.
$$\begin{aligned} H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2} D^0[e^{-x^2}] = 1 \\ H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2} D^1[e^{-x^2}] = 2x \end{aligned}.$$
Si
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}],$$
alors
$$\underbrace{H_n'(x)}_{=2xH_{n-1}(x)} = (-1)^n 2xe^{x^2} D^n[e^{-x^2}] + (-1)^n e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$
Or
$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \text{ pour } n \geq 1,$$
donc
$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$
8. H_0 satisfait l'équation différentielle
$$y'' - 2xy' = 0.$$
H_1 satisfait l'équation différentielle
$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$
On a
$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + \underbrace{2nH_{n-1}(x)}_{=H_n'(x)} = 0, \text{ pour } n \geq 1.$$
Donc
$$\underbrace{H_{n+1}'(x)}_{=2(n+1)H_n(x)} - 2xH_n'(x) - 2H_n(x) + H_n''(x) = 0, \text{ pour } n \geq 1.$$
Donc,
$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \text{ pour } n \geq 1.$$

Exercice 7 *Correction* :

1. • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.
   • La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,
   $$\begin{aligned} \varphi(P,P) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall t \in [0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \quad \forall t \in [0,+\infty[,\ P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$
   Ainsi, la forme φ est définie et finalement l'application φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz permet d'écrire
   $$(X^n e^{-X})^{(n)}e^X = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^n)^{(n-k)}(e^{-X})^{(k)}\right) e^X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} X^k.$$
   En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $deg(h_n) = n$ (et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$) et on sait que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Soient $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto (t^n e^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient
   $$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}dt = \int_0^A P(t)(t^n e^{-t})^{(n)}dt = [P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}dt.$$
   Maintenant, $(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ ou Q est un polynôme et donc $P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de Leibniz montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient
   $$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}dt.$$
   De manière générale, pour $0 \leq k \leq n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient
   $$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}dt.$$
   En particulier, pour $k = n$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que
   $$\forall P \in R[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(P,h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}dt.$$
   En particulier, si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P,h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $h_n \in ((\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\varphi(h_n,h_k) = 0$ et on a montré que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X],\varphi)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $deg(h_n) = n$ et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$, on a $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$. La question précédente fournit alors
   $$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t}dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!\Gamma(n+1) = n!^2,$$
   et donc $\|h_n\| = n!$. Par suite, la famille $\left(\dfrac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X],\varphi)$.

Exercice 8 *Correction* :

1. L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   $$\begin{aligned} \Phi(P,P) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^1 f(t)P^2(t)dt = 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle).} \end{aligned}$$
   Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$. L'application Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.
3. Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient $a_1, \dots, a_p$ ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geq 1$. Si $p \geq 1$, on pose $Q = (X - a_1) \dots (X - a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$. Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le degré de P_n. D'autre part, au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0, 1]$, de signe constant sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Exercice 9 *Correction* :

1. L'application est symétrique par commutativité de $\mathbb{R}$, linéaire en chaque variable par linéarité de l'intégrale et distributivité de la multiplication par rapport l'addition sur $\mathbb{R}$, elle est positive par positivité de l'intégrale. Pour montrer qu'elle est définie positive, on utilise le fait que pour une fonction continue f à valeurs réelles, $\int_{-1}^{1} f^2 = 0$ implique que f est nulle sur $[-1, 1]$. Comme de plus f est ici un polynôme, de la nullité de la fonction polynomiale associée sur $[-1, 1]$ on déduit la nullité du polynôme f. Ainsi, $< .,. >$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. C'est une application directe de l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ (les calculs ne sont pas demandés ici).
3. Cherchons les vecteurs propres en procédant directement (la dimension n'est pas finie, hors de question d'invoquer un polynôme caractéristique). Si P est un polynôme de degré 0 (et donc non nul), alors $\Phi(P) = 0$, 0 est donc la valeur propre associée au vecteur propre 1 (par exemple). Soit P un polynôme de degré 1, $P = aX + b$, alors $\Phi(P) = 2aX$. Ainsi, 2 est la valeur propre associée au polynôme X. On suppose maintenant que P est un polynôme de degré d, avec $d > 3$, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi(P) = \lambda P \Leftrightarrow (-2a_2 - \lambda a_0) + (-6a_3 + (2 - \lambda)a_1)X + \sum_{k=2}^{d-2} ((k^2 + k - \lambda)a_k - (k + 1)(k + 2)a_{k+2})X^k$$
$$+(d^2 - d - 4 - \lambda)a_{d-1}X^{d-1} + (d^2 + d - \lambda)a_d X^d = 0.$$

D'où l'on tire successivement que

$$\begin{gathered}(d^2 + d - \lambda)a_d = 0 \Leftrightarrow \lambda = d(d + 1) \text{ (puisque } a_d \neq 0),\\ (d^2 - d - 4 - d(d + 1))a_{d-1} = 0 \Leftrightarrow a_{d-1} = 0,\\ \forall 2 \leq k \leq d - 2,\ a_k = \frac{(k + 1)(k + 2)}{k^2 + k - d^2 - d} a_{k+2} \text{ (bien défini car } k^2 + k - d^2 - d < 0),\\ a_1 = \frac{6}{2 - d^2 - d} a_3 \text{ (bien défini car } d \neq 2),\\ a_0 = \frac{2}{d^2 + d} \text{ (bien défini car } d > 0).\end{gathered}$$

Ceci établit l'existence d'un polynôme de degré d, f_d, associé à la valeur propre $d(d+1)$, pour tout $d \in \mathbb{N}$. Les valeurs propres de Φ sont donc les $d(d+1)$, $d \in \mathbb{N}$, et les polynômes $(f_d)_{d\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre (car de degrés échelonnés) qui engendre $\mathbb{R}[X]$ (car pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_d) = \mathbb{R}_d[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^d)$). Quitte à renormaliser, on peut choisir les f_d tels que $< f_d, f_d >= 1$. Il ne reste alors plus qu'à montrer que les f_d sont deux à deux orthogonaux. Pour cela, montrons que l'endomorphisme Φ est symétrique, c'est-à-dire que $\forall f, g \in \mathbb{R}[X]$, $< \Phi(f), g >=< f, \Phi(g) >$. Soient donc $f, g \in \mathbb{R}[X]$, on calcule

$$< \Phi(f), g >= \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)f''(t)g(t) + 2tf'(t)g(t)dt.$$

On effectue une intégration par parties et l'on trouve que

$$\begin{aligned}< \Phi(f), g > &= \int_{-1}^{1} 2tf'(t)g(t)dt - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)f'(t)g'(t)dt + [2tf(t)g(t)]_{-1}^{1}\\ &\quad - \int_{-1}^{1} 2tf(t)g'(t)dt - \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.\end{aligned}$$

Cette expression est invariante par échange de f et g, si bien que l'on a $< \Phi(f), g >=< f, \Phi(g) >$, l'endomorphisme est donc symétrique, et ses vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes (les f_d) sont donc deux à deux orthogonaux, ce qu'il fallait démontrer (pour montrer qu'un endomorphisme symétrique a des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes deux à deux orthogonaux, on écrit $\lambda_d < f_d, f'_d >=< \Phi(f_d), f_{d'} >=< f_d, \Phi(f_{d'}) >= \lambda_{d'} < f_d, f_{d'} >$, et donc comme $\lambda_d \neq \lambda_{d'}$, il vient $< f_d, f_{d'} >= 0$).

4. D'après ce qui précède, -1 n'est pas valeur propre de Φ, donc $\Phi + Id$ est injective. Il faut maintenant montrer que $\Phi + Id$ est surjective. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et d le degré de P. La restriction Φ_d de Φ à $\mathbb{R}_d[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$ (vérification immédiate ou simple constatation sur les calculs déjà faits), et l'endomorphisme $(\Phi_d - Id_{\mathbb{R}_d[X]})$ est bijectif, puisqu'injectif (par injectivité de $\Phi - Id$) et que $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{R}_d[X]$, $(\Phi_d - Id_{\mathbb{R}_d[X]})(Q) = P$, et alors, on a aussi $(\Phi - Id)(Q) = P$, ce qui établit la surjectivité de $\Phi - Id$. On a donc montré que $\Phi - Id$ est une bijection de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10

1. L'application φ est symétrique par commutativité de $\mathbb{R}$, linéaire en chaque variable par linéarité de l'intégrale et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur $\mathbb{R}$, elle est positive par positivité de f et positivité de l'intégrale. Pour montrer qu'elle est définie positive, on utilise le fait que pour une fonction continue g à valeurs réelles positives, $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ implique que g est nulle sur $[0,1]$. Puisque f est non identiquement nulle sur $[0,1]$, P^2, qui est un polynôme, a sa fonction polynomiale associée sur $[0,1]$ nulle en une infinité de points (cette même infinité de points où f n'est pas nulle), on en déduit la nullité du polynôme P. Ainsi, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$
$$1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$$
3. Supposons par l'absurde que P_n n'est pas scindé à racines simples dans $[0,1]$. On peut donc écrire P_n sous la forme
$$P_n(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s}(X - y_i)^{\beta_j} \prod_{k=1}^{t} Q_k(X)^{\delta_k}$$
où $r \in \{0, \ldots, n\}$, $s \in \{0, \ldots, n\}$, $t \in \{0, \ldots, n\}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $x_i \in [0,1]$ et $\alpha_i \geq 1$, $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$, $y_j \in \mathbb{R}\backslash[0,1]$ et $\beta_j \geq 1$, $\forall k \in \{1, \ldots, t\}$, Q_k est un polynôme réel irréductible de degré 2 et $\delta_k \geq 1$. On note $i_1, \ldots, i'_r$ les indices $i \in \{1, \ldots, r\}$ tels que α_i est impair. On forme alors le polynôme $Q(X) = \displaystyle\prod_{l=1}^{r'}(X - x_{i_l})$, qui est de degré strictement inférieur à celui de P_n, sauf si ce dernier est scindé à racines simples dans $[0,1]$, ce qui est exclu par hypothèses. On a alors
$$0 = \varphi(P_n, Q) = \int_0^1 f(x)P_n(x)Q(x)dx = \int_0^1 f(x) \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{\alpha'_i} \prod_{j=1}^{s}(x - y_i)^{\beta_j} \prod_{k=1}^{t} Q_k(x)^{\delta_k} dx$$
avec $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, α'_i pair. Ainsi, $f(x) \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{\alpha'_i} \prod_{j=1}^{s}(x - y_i)^{\beta_j} \prod_{k=1}^{t} Q_k(x)^{\delta_k}$ est de signe constant sur $[0,1]$, et définit une fonction continue non identiquement nulle sur $[0,1]$, c'est absurde d'après les propriétés de l'intégrale. Donc P_n est bien scindé à racines simples dans $[0,1]$.

Exercice 11 On cherche à déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire
$$< P, Q > := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
par orthonormalisation de la base canonique $(1, X, X^2)$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, et on appliquera le théorème de projection dans un espace euclidien sur un sous-espace vectoriel selon lequel
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |t^3 - at^2 - bt - c|^2 dt = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2,$$
où $p_{\mathbb{R}_2[X]}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$, et où $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$ s'écrit dans la nouvelle base
$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) =< X^3, P_0 > P_0+ < X^3, P_1 > P_1+ < X^3, P_2 > P_2.$$
Calculons maintenant (P_0, P_1, P_2) : on trouve
$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
en posant
$$\hat{P}_1 := X + \alpha P_0$$

la relation

$$< \hat{P}_1, P_0 >= 0 \text{ donne } \alpha = 0,$$

et la condition de normalisation

$$||P_1|| = 1 \text{ donne } P_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\hat{P}_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}X.$$

Le terme de degré 1 de P_2 est nul car

$$\int_{-1}^{1} P_1 P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} tP_2(t)dt = 0$$

et il n'est donc pas nécessaire de calculer P_2 car la quantité $< X^3, P_2 >$ ne dépend que du terme de degré 1 de P_2 (par imparité du polynôme X^3). On trouve finalement

$$X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = X^3 - < X^3, P_1 > P_1 = X^3 - \frac{3}{5}X$$

et

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |t^3 - at^2 - bt - c|^2 dt = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt = \frac{8}{175}.$$