Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 4 - Polynômes orthogonaux.

Exercice 1 Montrer que la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale par rapport à la fonction poids $w(x) > 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ c'est-à-dire $< P_n|P_k >:= \int_a^b P_n(x)P_k(x)w(x)dx = 0$, pour $n \neq k$ si et seulement si $< P_n|x^k >= \int_a^b P_n(x)x^k w(x)dx = 0$, pour $k = 0, \dots, n-1$.

Exercice 2 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \int_{-1}^{+1} |f(t)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt < \infty\}$ muni du produit scalaire :

$$< f|g >= \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

On considère la suite des polynômes de Tchebychev T_n de degré n donnée par

$$\begin{array}{l} T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ n \geq 2. \end{array}$$

1. Montrer que pour $t \in [-1;1]$ on a $T_n(t) = \cos(n\arccos(t))$.
2. Calculer $||T_n|| = \sqrt{< T_n|T_n >}$. En déduire que $T_n \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace E.

Exercice 3 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-t^2}dt < \infty\}$ muni du produit scalaire :

$$< f|g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-t^2}dt$$

et de la norme $\|.\|$ associée. On considère la suite orthonormée des polynômes P_n de degré n dont le coefficient du plus haut degré est $a_n > 0$.

1. Montrer qu'il existe des constantes réelles α_n, β_n et γ_n telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$tPn(t) = \alpha_n P_{n+1}(t) + \beta_n P_n(t) + \gamma_n P_{n-1}(t).$$
2. Expliciter $P_0(t)$ et $P_1(t)$.
3. Montrer que $\beta_n = 0$ et $\gamma_n = \alpha_{n-1}$.
4. Montrer que $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $\|tP_n\|^2 = \alpha_n^2 + \alpha_{n-1}^2 = \frac{1}{2} + < P_n|tP_n' >$ et que $< P_n|tP_n' >= n = \alpha_{n-1} < P_{n-1}|P_n' >= 2\alpha_{n-1}^2$.
En déduire que $\alpha_n^2 = \frac{1}{2} + \alpha_{n-1}^2$ et donner α_n en fonction de n.
On appelle polynôme de Hermite de degré n le polynôme H_n défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
$$H_n(t) = 2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}P_n(t).$$
6. Établir la relation de récurrence à 3 termes satisfaite par les polynômes H_n.
7. Calculer $||H_n' - 2nH_{n-1}||$.
8. Écrire une équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par les H_n.
9. Montrer que les H_n vérifient la formule de Rodriguez : $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$.

Exercice 4 On considère l'opérateur de legendre L défini de la manière suivante :

$$f \in \mathcal{C}^2 \rightarrow \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{df}{dx}\right].$$

Soit $\mathcal{L}_n$ la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$.

1. Écrire la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$ et déterminer les valeurs propres de $\mathcal{L}_n$. Que peut-on en déduire ?
   On considère les fonctions polynomiales U_n et P_n définies par :
   $$U_n(x) = (x^2-1)^n,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n U_n}{dx^n}(x) \text{ avec } U_0(x) = P_0(x) = 1.$$
2. Montrer que les fonctions polynomiales P_{2n} et P_{2n+1} sont respectivement paire et impaire.
3. En écrivant que $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et en utilisant la formule de Leibniz, montrer que $P_n(1) = 1$. Calculer P_1 et P_2.
4. Vérifier les relations :
   $$\begin{array}{rcl} U'_{n+1}(x) & = & 2(n+1)xU_n(x) \\ (x^2-1)U'_n(x) & = & 2nxU_n(x). \end{array}$$
   En utilisant les relations précédentes et la formule de Leibniz, montrer que la suite $(P_n)_n$ vérifie la relation
   $$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x),$$
   et que $\mathcal{L}(Pn) = n(n+1)P_n$. Que peut-on en conclure ?
5. Montrer que pour les entiers naturels n et m, on a $< \mathcal{L}P_n|P_m >=< P_n|\mathcal{L}P_m >$ où $< f|g >= \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. En déduire que $< P_n|P_m >= 0$ si $n \neq m$.
6. En utilisant l'orthogonalité des polynômes P_n, montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_n$ telle que :
   $$\int_{-1}^{+1} P'_{n+1}(x)P_n(x)dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2,$$
   où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $< .|. >$. On convient que $a_0 = 1$.
7. Montrer la relation
   $$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) = 2 - 2\int_{-1}^{+1} xP_n(x)P'_n(x)dx.$$
   En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Quelle est alors la suite orthonormale pour le produit scalaire $< .|. >$?
8. Montrer que la suite $(P_n)_n$ vérifie la relation de récurrence à trois termes suivante :
   $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$
9. Montrer que $\|\mathcal{L}_n\| = n(n+1)$.
10. Montrer la relation de Christoffel-Darboux
    $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y} \text{ pour } x \neq y.$$