Analyse Numérique

Fiche 5 - Formules de quadrature.

Exercice 1 *Correction* :

1. 3. Soit $(x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ une subdivision (régulière) de $[a, b]$ et $h = \dfrac{b-a}{n}$ le pas de discrétisation (on a donc $x_i - x_{i-1} = h$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$). La méthode des rectangles est la méthode qui consiste à interpoler sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ la fonction f à intégrer par une fonction constante (polynôme de degré 0). Soit ξ_i le point d'interpolation sur $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on a alors :
$$I(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$
Le choix du point ξ_i a de l'importance pour la détermination du terme d'erreur $E(h) = I - I(h)$.
• Si $\xi_i = x_{i-1}$, ou $\xi = x_i$, c'est la méthode du rectangle.
• Si $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, il s'agit de la méthode du point milieu.

2. Si, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i = x_{i-1}$ (ou x_i), l'erreur commise sur l'intervalle $[a, b]$ est
$$\boxed{E(h) = \pm\frac{b-a}{2}hf'(\eta) = \pm\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\eta),\ \ \eta \in [a, b]}. \tag{1}$$
On ne confondra pas cette erreur avec celle commise sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ égale à
$$E_i(h) = \pm\frac{h^2}{2}f'(\eta_i) = \pm\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}f'(\eta_i) \text{ où } \eta_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
Montrons (1) : on a
$$I - I(h) = \int_a^b f(u)du - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(t) - f(\xi_i))dt.$$
D'après la formule des accroissements finis, en supposant que la fonction f soit dérivable sur $]\min(t, \xi_i), \max(t, \xi_i)[$ avec $t \in]x_{i-1}, x_i[$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists \eta_i \in]\min(t, \xi_i), \max(t, \xi_i)[$ tel que
$$f(t) - f(\xi_i) = (t - \xi_i)f'(\eta_i).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} I - I(h) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(t - \xi_i)f'(\eta_i)dt = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}t^2 - \xi_i t\right]_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}x_{i-1}^2 - (x_i - x_{i-1})\xi_i\right) f'(\eta_i). \end{aligned}$$
. Si $\xi_i = x_{i-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,
$$\begin{aligned} I - I(h) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}x_{i-1}^2 - (x_i - x_{i-1})x_{i-1}\right) f'(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f'(\eta)}{2}(x_i^2 - 2x_{i-1}x_i + x_{i-1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}f'(\eta_i) = \frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_i) \end{aligned}$$
On utilise ensuite le lemme suivant :
Lemme 1.1 *Si φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_k)_{1\le k\le n}$ une suite de points de $[a, b]$ avec $n \ge 2$, il existe alors un réel c dans $[a, b]$ tel que :*
$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(x_k) = n\varphi(c).$$

Preuve : En désignant par m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de φ sur $[a,b]$, on a $m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k) \leq M$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(x_k) = \varphi(c)$.□

On déduit de ce lemme que

$$I - I(h) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta) \text{ où } \eta \in [a,b].$$

. Si $\xi_i = x_i$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned} I - I(h) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}x_{i-1}^2 - (x_i - x_{i-1})x_i\right) f'(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(\eta_i)}{2}(-x_{i-1}^2 + 2x_i x_{i-1} - x_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2} f'(\eta_i) = -\frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i) = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta),\ \eta \in [a,b]. \end{aligned}$$

On retrouve bien $E(h) = \sum_{i=1}^{n} E_i(h) = \pm\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta)$.

Détermimons le nombre minimum n_0 de subdivisions de $[0,1]$ pour avoir $\int_0^1 \exp(x^2)dx$ à 10^{-2} près. On a

$$E(h) = I - I(h) = \pm\frac{(1-0)^2}{2n}(2\eta\exp(\eta^2))$$

avec $\eta \in [0,1]$. Le maximum atteint par la fonction $\eta \mapsto \eta\exp(\eta^2)$ sur $[0,1]$ est égal à e (atteint pour $\eta = 1$). On en déduit que

$$|E(h)| \leq 10^{-2} \Rightarrow \left|\frac{(1-0)^2}{2n_0}(2\eta\exp(\eta^2))\right| \leq 10^{-2} \Rightarrow \left|\frac{1}{n_0}e\right| \leq 10^{-2} \Rightarrow n_0 \geq 271,8.$$

Il suffit donc que le nombre de subdivisions de $[0,1]$ soit supérieur ou égal à 272.

4. Si $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, alors l'erreur s'écrit

$$\boxed{E(h) = \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\eta) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta),\ \eta \in [a,b]}.$$

On considère le développement de Taylor de f au voisinage de c à l'ordre n : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et si $c \in [x_{i-1}, x_i]$, il existe $\eta \in]x_{i-1}, x_i[$ tel que :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta)(x-c)^{n+1}.$$

À l'ordre 2, et au voisinage de $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, il existe $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que

$$f(x) = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x-\xi_i) + \frac{1}{2}f''(\eta_i)(x-\xi_i)^2.$$

On intégre chacun des termes de l'égalité précédente entre x_{i-1} et x_i. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-\xi_i)dx + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\eta_i)(x-\xi_i)^2dx \\ &= f(\xi_i)[x]_{x_{i-1}}^{x_i} + f'(\xi_i)\left[\frac{1}{2}(x-\xi_i)^2\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{2}f''(\eta_i)\left[\frac{1}{3}(x-\xi_i)^3\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &= f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) + \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24} f''(\eta_i). \end{aligned}$$

On somme ensuite sur i et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) + \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24}f''(\eta_i)\right) \\ &= I(h) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24}f''(\eta_i) = I(h) + \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) = I(h) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta) \end{aligned}$$

avec $\eta \in [a,b]$.

Détermimons le nombre minimum n_0 de subdivisions de $[0,1]$ pour avoir $\displaystyle\int_0^1 \exp(x^2)dx$ à 10^{-2} près. On a

$$|E(h)| = |I - I(h)| = \left|\frac{(1-0)^3}{24n^2}2(2\eta^2+1)\exp(\eta^2)\right|$$

avec $\eta \in [0,1]$. Le maximum atteint par la fonction $\eta \mapsto (2\eta+1)\exp(\eta^2)$ sur $[0,1]$ est égal à $3e$ (atteint pour $\eta = 1$). On en déduit que

$$E(h) \leq 10^{-2} \Rightarrow \left|\frac{(1-0)^3}{24n_0^2}2(2\eta^2+1)\exp(\eta^2)\right| \leq 10^{-2} \Rightarrow \left|\frac{1}{4n_0^2}e\right| \leq 10^{-2} \Rightarrow n_0 \geq 8,24.$$

Il suffit donc que le nombre de subdivisions de $[0,1]$ soit supérieur ou égal à 9.

Exercice 2 *Correction* : On a

$$I = \int_0^{\pi/8} f(x)dx + \int_{\pi/8}^{\pi/4} f(x)dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/8} f(x)dx + \int_{3\pi/8}^{\pi/2} f(x)dx.$$

1. Soit T l'approximation de I donnée par la méthode des trapèzes. Le pas h est donné par $h = \frac{\pi}{8}$. On a

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4)\right) \\ &= \frac{\pi}{16}(0 + 2(0,382683 + 0,707107 + 0,92388) + 1) \\ &= 0,987116. \end{aligned}$$

2. Soit S l'approximation de I donnée par la méthode Simpson. Le pas h est donné par $h = \frac{\pi}{4}$. La méthode de Simpson s'écrit :

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{6}((f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))) \\ &= \frac{\pi}{24}(0 + 4 \times 0,382683 + 2 \times 0,707107 + 4 \times 0,923880 + 1) \\ &= 1,000135. \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés dans cet exercice correspondent à la fonction $\sin(x)$. Et $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 1$. On constate donc que l'approximation de I par Simpson est meilleure que celle des trapèzes puisque $|S - I| = 0,000135$ et $|T - I| = 0,012884$.

Exercice 3 *Correction* : On sait que γ est l'accélération de la vitesse V donc

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)ds \text{ et } V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(s)ds = I.$$

1. Calculons I par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$. On a alors

$$I = \frac{h}{2}\left(\gamma(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma(x_i) + \gamma(x_n)\right) = \frac{10}{2}(30 + 2 \times (31,63 + \ldots + 46,70) + 50,67) = 3089 \text{ m.s}^{-1}.$$

2. Calculons I par la méthode de Simpson.

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3}[\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(x_1) + \gamma(x_3) + \ldots) + 2(\gamma(x_2) + \gamma(x_4) + \ldots)] \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50,67 + 4 \times (31,63 + 35,47 + \ldots) + 2 \times (33,44 + 37,75 + \ldots)) = 3087 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Exercice 4 *Correction* :

1. $N = 5$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{5}$. Calculons I par la méthode des trapèzes :

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{h}{2}\left(\gamma(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma(x_i)+\gamma(x_n)\right)\\
&= \frac{\pi}{10}\left(\sin(\pi^2)+\sin(0^2)+2\left(\sin\left(\left(\frac{\pi}{5}\right)^2\right)+\sin\left(\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2\right)+\sin\left(\left(\frac{3\pi}{5}\right)^2\right)+\sin\left(\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2\right)\right)\right)\\
&= 0,504431.
\end{aligned}
$$

2. $N=10$ donc le pas d'intégration est $h=\dfrac{\pi}{10}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{20}\left(\sin(\pi^2)+\sin(0)+2\left(\sin\left(\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^2+\sin\left(\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)^2+\sin\left(\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)^2+\ldots+\sin\left(\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)^2\right)\right)\\
&= 0,72238
\end{aligned}
$$

alors que la valeur exacte est approximativement 0,772651. Avec ce pas plus petit l'approximation numérique est meilleure.

Exercice 5 *Correction* : Soit N le nombre de points d'appui, points milieux compris. Le pas d'intégration est $h=\dfrac{b-a}{N}=\dfrac{2\pi}{N}$. D'autre part, l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par

$$E(h)=-\frac{(b-a)}{180}h^4f^{(4)}(\xi)=-\frac{2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^4\cos(\xi)$$

où $\xi\in[a,b]$. (Si N désigne le nombre de points d'appui, points milieux non compris, l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par $E(h)=-\dfrac{(b-a)}{2880}h^4f^{(4)}(\xi)$ où $\xi\in[a,b]$.) Par conséquent,

$$|E(h)|\le\left|\frac{2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^4\right|.$$

Ainsi, pour que $|E(h)|\le 0,5\times10^{-3}$, il suffit que N vérifie $\left|\dfrac{\pi}{90}\dfrac{16\pi^4}{N^4}\right|\le 0,5\times10^{-3}$. Donc,

$$N^4\ge\frac{1}{0,5\times10^{-3}}\frac{\pi}{90}16\pi^4\simeq 18,6.$$

On prendra $N=20$ car, pour Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ doit toujours être pair.

Exercice 6 *Correction* : Soit $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin(x)}{x}dx$. L'erreur de la méthode des trapèzes est

$$E(h)=-\frac{b-a}{2}h^2f''(\xi)$$

donc $|E(h)|\le\dfrac{b-a}{12}\dfrac{(b-a)^2}{n^2}M_2$ où $M_2=\max\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$. Ainsi, pour avoir $|E(h)|\le\varepsilon$, où ε est l'erreur permise, il suffit de prendre N subdivisions de l'intervalle d'intégration telles que :

$$\frac{(b-a)^3}{12}\frac{M_2}{N^2}\le\varepsilon$$

donc il suffit que N vérifie

$$N\ge\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}M_2}.\tag{2}$$

Cherchons M_2 : on a $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ et $f''(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x}-\dfrac{2\cos(x)}{x^2}+\dfrac{2\sin(x)}{x^3}$. Pour déterminer les extrémas de f'', on cherche alors les racines de $f^{(3)}(x)=0$. Un calcul simple donne

$$f^{(3)}(x)=\frac{1}{x^4}(-x^3\cos(x)+6x\cos(x)+3x^2\sin(x)-6\sin(x)).$$

On cherche alors les racines de l'équation

$$-x^3\cos(x)+6x\cos(x)+3x^2\sin(x)-6\sin(x)=0\Leftrightarrow(6x-x^3)\cos(x)=(6-3x^2)\sin(x).$$

En supposant que $\cos(x) \neq 0$ et $6 - 3x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ et $x \neq \pm\sqrt{2}$, on obtient $\tan(x) = \frac{6x - x^3}{6 - 3x^2}$. Étudions cette équation : graphiquement, en traçant les courbes représentatives de $\tan(x)$ et de $\frac{6x - x^3}{6 - 3x^2}$ sur $[0, \pi]$, on voit rapidement que le seul point d'intersection des deux courbes est d'abscisse $x = 0$. On en déduit que f'' atteint ses extrémas sur $[0, \pi]$ en $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ (puisqu'on a exclus ces valeurs pour mettre en forme l'équation et qu'on ne sait pas ce qui s'y passe). Cherchons $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x)$. Le développement limité en $x = 0$ de $f''(x)$ donne

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}\left(-x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) + \bigcirc(x^5)\right) = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^3}{3} + \bigcirc(x^5)\right).$$

Donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = -\frac{1}{3}$. Par ailleurs, on vérifie facilement que $\frac{1}{3} \geq |f''(\sqrt{2})|$ et $\frac{1}{3} \geq \left|f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$. On a donc $M_2 = \frac{1}{3}$ et par conséquent de l'équation (2) on obtient $N \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{12} 10^2 \frac{1}{3}}$ soit $N \geq 10$.

Application. Prenons alors $N = 10$ d'où $h = \frac{b-a}{10} = \frac{\pi}{10}$ et donnons une approximation de l'intégrale I par la méthode des trapèzes :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq \frac{\pi}{20}\left(1 + 0 + 2\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{10})}{\frac{\pi}{10}} + \frac{\sin(\frac{2\pi}{10})}{\frac{2\pi}{10}} + \dots + \frac{\sin(\frac{9\pi}{10})}{\frac{9\pi}{10}}\right)\right) \simeq 1,845.$$

Exercice 7 <u>*Correction*</u> :

- Déterminons dans un premier temps la valeur exacte de $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$: on montre facilement que $I = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) \simeq 0,69314718$.
- On évalue maintenant I à l'aide de la méthode des trapèzes, avec une erreur inférieure à 10^{-3}. On utilise la formule (2) de l'exercice précédent. Puisque $f''(x) = \frac{2}{(1+x^3)}$ et $x \in [0,1]$, $M_2 = 2$. On doit donc choisir un nombre de subdivisions vérifiant $N \geq \sqrt{\frac{(1-0)^3}{12} \frac{2}{10^{-3}}} = 12,91$ soit $N \geq 13$. On a alors
$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \simeq \frac{1}{26}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{13}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{12}{13}}\right)\right) = \frac{18566236531}{26771144400} \simeq 0,6935167303.$$
- Utilisons enfin la méthode de Romberg. En analyse numérique, la méthode de Romberg est une méthode récursive de calcul numérique d'intégrale, basée sur l'application du procédé d'extrapolation de Richardson à la méthode des trapèzes. Cette technique d'accélération permet d'améliorer l'ordre de convergence de la méthode des trapèzes, en appliquant cette dernière à des divisions dyadiques de l'intervalle d'étude et en en formant une combinaison judicieuse.
On admettra le résultat suivant :
Proposition 1.1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur un segment $[a,b]$ et si $T(h)$ désigne l'approximation de $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes pour un pas égal à $h = \frac{b-a}{n}$, alors on a le développement limité suivant en 0 :*
$$T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_{k-1} h^{2(k-1)} + \bigcirc(h^{2k})$$
où les coefficients a_i ne dépendent ni de h ni de n.
On se sert de ce développement pour accélérer la convergence de la méthode des trapèzes. On a donc
$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + \dots + a_{k-1} \frac{h^{2(k-1)}}{4^{k-1}} + \bigcirc(h^{2k}).$$
La convergence vers I sera plus rapide si l'on parvient à éliminer le terme en h^2 entre ces deux expressions. Rien n'est plus facile en considérant $4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)$:
$$4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) = 3I + \bigcirc(h^4) \Leftrightarrow \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = I + \bigcirc(h^4).$$
L'approximation de I par $\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}$, qui n'est rien d'autre que la méthode de Simpson, est donc meilleure que celle obtenue avec $T(h)$. L'erreur commise est en $\bigcirc(h^4)$.

Le même procédé peut être reconduit, afin d'annuler les termes en $h^4, h^8, \ldots$, qui correspondent à des approximations de I de plus en plus précises. On introduit les notations suivantes pour m entier positif ou nul :

– pour m entier positif ou nul, $r_{0,m} = T\left(\frac{b-a}{2^m}\right)$ (méthode des trapèzes),

– pour m entier positif ou nul, $r_{1,m} = \frac{4r_{0,m} - r_{0,m-1}}{3}$ (première accélération).

Retour à l'exercice : $r_{1,1} = \frac{4r_{0,1} - r_{0,0}}{3}$. D'après la méthode des trapèzes, $r_{0,0} = \frac{18566236531}{26771144400}$. La méthode des trapèzes appliquée à $2h$ donne $r_{0,1} = \frac{2148380431690589475053}{3099044504245996706400} \simeq 0,6932396191$. Finalement,

$$r_{1,1} = \frac{4 \times \frac{2148380431690589475053}{3099044504245996706400} - \frac{18566236531}{26771144400}}{3} = \frac{2929219325039144133383}{4225969778517268236000} \simeq 0,6931472487.$$

La méthode de Romberg (erreur en h^4) est bien-sûr plus rapide que la méthode des trapèzes (erreur en h^2).

Exercice 8 *Correction* : Soit $F(x) = \int_0^x t\exp(-t)dt$, on a $F(1) = \int_0^1 t\exp(-t)dt$

1. Cherchons le nombre de subdivisions de $[0,1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-8} près en utilisant la méthode des trapèzes dont l'erreur est donnée par :

$$E(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

donc $|E(h)| \leq \frac{b-a}{12}\frac{(b-a)^2}{N^2}M_2$ où $M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$. Ainsi, pour avoir $|E(h)| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 10^{-8}$, il suffit de prendre N subdivisions de l'intervalle d'intégration telles que

$$\frac{(b-a)^2}{12}\frac{M_2}{N} \leq \varepsilon.$$

N doit par conséquent vérifier (2) (de l'exercice 6). Cherchons M_2. On a $f(t) = t\exp(-t)$, $f'(t) = (1-t)\exp(-t)$ et $f^{(2)}(t) = (t-2)\exp(-t)$. Donc $M_2 = |f''(0)| = 2$. Ainsi, l'inéquation (2) devient $N \geq \frac{10^4}{\sqrt{6}}$ soit $N \geq 4083$. Avec $N = 4083$ subdivisions, l'erreur commise lors de l'approximation de cette intégrale par la méthode des trapèzes sera plus petite que 10^{-8}.

2. Cherchons le nombre de subdivisions de $[0,1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-8} près en utilisant la méthode de Simpson. L'erreur théorique de cette méthode est

$$E(h) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$$

si N désigne le nombre de points d'appui, points milieux compris. Donc $E(h) \leq \frac{(b-a)^5}{180N^4}M_4$ où $M_4 = \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$. Ainsi, pour avoir $|E(h)| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 10^{-8}$, il suffit de prendre N subdivisions de l'intervalle d'intégration telles que

$$\frac{(b-a)^4}{180N^4}M_4 \leq \varepsilon.$$

Donc il suffit que N vérifie

$$N^4 \geq \frac{(b-a)^5}{180\varepsilon}M_4.$$

Cherchons M_4. On a $f(t) = t\exp(-t)$, $f^{(4)}(t) = (t-4)\exp(-t)$ et $f^{(5)}(t) = (5-t)\exp(-t)$. Donc $M_4 = |f^{(4)}(0)| = 4$. Ainsi l'inéquation (2) devient $N^4 \geq \frac{4}{180 \times 10^{-8}}$ soit $N \geq 38,6$. On prendra alors $N = 40$ puisque dans le cas de la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle d'intégration doit toujours être pair.