

Analyse Numérique

Fiche 5 - Formules de quadrature.

Exercice 1

1. Donner les formules des rectangles approchant $I = \int_a^b f(x)dx$.
2. Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles, ainsi que le nombre minimum n de subdivisions de $[0, 1]$ pour avoir $\int_0^1 \exp(x^2)dx$ à 10^{-2} près.
3. Donner la méthode des rectangles à point milieu.
4. Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles à point milieu. Même application qu'à la question 2.

Exercice 2 Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0,382683	0,707107	0,923880	1

Ces points d'appui étant ceux donnant $\sin(x)$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Exercice 3 On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération que l'on note γ :

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31,63	33,44	35,47	37,75	40,33	43,29	46,70	50,67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par les Trapèzes puis par Simpson.

Exercice 4 Calculer à l'aide de la méthode des Trapèzes l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \sin(x^2)dx$ (avec $N = 5$ puis $N = 10$ subdivisions).

Exercice 5 Trouver le nombre N de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à $0,5 \times 10^{-3}$ près, grâce à Simpson, l'intégrale : $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$.

Exercice 6 Évaluer à l'aide de la méthode des Trapèzes, l'intégrale : $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$, avec une erreur inférieure à 10^{-2} .

Exercice 7 Évaluer à l'aide de la méthode des trapèzes puis celle de Romberg basée sur les trapèzes, l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, avec une erreur inférieure à 10^{-3} . Comparer les vitesses de convergence. Comparer à la valeur « exacte ».

Exercice 8 Soit $F(x) = \int_0^x t \exp(-t)dt$. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-8} près en utilisant

1. la méthode des Trapèzes,
2. la méthode de Simpson.