Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 6 - Formules de quadrature.

Exercice 1 *Correction* : Une formule de quadrature est exacte sur $\mathcal{P}_n$ si et seulement si $\forall P \in \mathcal{P}_n$,

$$E(P) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P(t)dt = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1).$$

Donc, la formule de quadrature sera exacte sur $\mathcal{P}_2$ si et seulement si

$$\left.\begin{array}{rcccl} \displaystyle\int_{-1}^{1} 1dx &=& 2 &=& A_0 + A_1 + A_2 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} xdx &=& 0 &=& -A_0 + A_2 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx &=& \dfrac{2}{3} &=& A_0 + A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcccc} A_0 &=& A_2 &=& \dfrac{1}{3} \\ A_1 &=& \dfrac{4}{3} & & \end{array}\right. ,$$

ce qui permet d'écrire finalement que

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + E(f). \tag{1}$$

Pour $P(x) = x^3$ on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = -A_0 + A_2$, soit une relation vérifiée par les coefficients déterminés précédemment. Cela permet d'affirmer que la formule est encore exacte pour les polynômes de degré 3.
Pour $P(x) = x^4$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} = A_0 + A_2$ soit une relation incompatible avec nos coefficients.
Conclusion, (1) est exacte pour les polynômes au plus de degré 3.

Exercice 2 *Correction* :

1. On procède comme dans l'exercice précédent. La formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$, cela implique les égalités :
$\displaystyle\int_{-1}^{1} 1dt = 2 = A_0 + A_1$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} tdt = 0 = A_0t_0 + A_1t_1$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3} = A_0t_0^2 + A_1t_1^2$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3dt = 0 = A_0t_0^3 + A_1t_1^3$
On résout donc le système de 4 équations à 4 inconnues suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_0 + A_1 &=& 2 \\ A_0t_0 + A_1t_1 &=& 0 \\ A_0t_0^2 + A_1t_1^2 &=& \frac{2}{3} \\ A_0t_0^3 + A_1t_1^3 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_1 = 2 - A_0 & & \\ 2t_1 + A_0(t_0 - t_1) &=& 0 \\ 2t_1^2 + A_0(t_0^2 - t_1^2) &=& \frac{2}{3} \\ 2t_1^3 + A_0(t_0^3 - t_1^3) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_1 = 2 - A_0 & & \\ A_0(t_0 - t_1) &=& -2t_1 \\ 2t_1^2 - 2t_1(t_0 + t_1) &=& \frac{2}{3} \\ 2t_1^3 - 2t_1(t_0^2 + t_0t_1 + t_1^2) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_1 = 2 - A_0 & & \\ A_0(t_0 - t_1) &=& -2t_1 \\ 2t_0t_1 &=& \frac{2}{3} \\ 2t_0t_1(t_0 - t_1) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_1 = 2 - A_0 & & \\ A_0(t_0 - t_1) &=& -2t_1 \\ 2t_0t_1 &=& \frac{2}{3} \\ t_0 &=& t_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A_0 &=& 1 \\ A_1 &=& 1 \\ t_0 &=& \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t_1 &=& \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Il nous reste à déterminer K. On pose $g(t) = t^4$ dans la formule (Q) mise à jour et on obtient :

$$\int_{-1}^{1} t^4dt = \frac{2}{5} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 24K \Leftrightarrow 24K = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \Leftrightarrow K = \frac{1}{135}.$$

Finalement,

$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t)dt = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{135}g^{(4)}(\tau).$$

2. On cherche la fonction affine h vérifiant

$$\begin{cases} h(x_i) = ax_i + b = -1 \\ h(x_{i+1}) = ax_{i+1} + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{x_{i+1}-x_i} \\ b = -\frac{x_{i+1}+x_i}{x_{i+1}-x_i} \end{cases}.$$

Finalement,

$$h(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}(2x - (x_{i+1} + x_i)).$$

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$. On réalise le changement de variable $x = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ et on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) dt.$$

Comme les points du support sont équidistants, $h = x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, N\}$ et on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) dt.$$

3. La formule composite associée à (Q) est donnée par

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) dt \\
= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + \right. \\
\left.\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^4 \frac{1}{135} f^{(4)}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\tau + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)\right] \\
= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)\right] + \\
\frac{h^4}{4320}(b-a)f^{(4)}(\xi),\ \xi \in]a, b[.\end{aligned}$$

On a utilisé le lemme suivant pour modifier l'écriture du terme d'erreur :

Lemme 1.1 *Si φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de points de $[a, b]$ avec $n \geq 2$, il existe alors un réel c dans $[a, b]$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(x_k) = n\varphi(c).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ <u>*Correction*</u> :

- $n = 1$. La formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$, cela implique le système :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} 1|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_0^1 (x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^2)dx + \int_0^1 (x^2)dx = 0 = A_0^{(1)}x_0^{(1)} + A_1^{(1)}x_1^{(1)} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^3)dx + \int_0^1 (x^3)dx = \frac{1}{2} = A_0^{(1)}x_0^{(1)2} + A_1^{(1)}x_1^{(1)2} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3|x|dx = 0 = A_0^{(1)}x_0^{(1)3} + A_1^{(1)}x_1^{(1)3} \end{cases}$$

  Ce système se résout de la même manière que dans l'exercice précédent. On obtient

$$A_0^{(1)} = \frac{1}{2},\ A_1^{(1)} = \frac{1}{2},\ x_0^{(1)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_0^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

  On détermine K en posant $f(x) = x^4$ dans (Q) :

$$\int_{-1}^{1} x^4|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^5)dx + \int_0^1 (x^5)dx = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + 12K_1 \Leftrightarrow K_1 = \frac{1}{144}.$$

  Finalement,

$$(Q_1)\quad \int_{-1}^{1} f(x)|x|dx = \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{144}f^{(4)}(\xi_1),\ \xi_1 \in]-1, 1[.$$

- $n=2$. La formule est exacte sur $\mathcal{P}_5$, cela implique le système :

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1|x|dx = 1 = A_0^{(2)} + A_1^{(2)} + A_2^{(2)} \\ \int_{-1}^{1} x|x|dx = 0 = A_0^{(2)}x_0^{(2)} + A_1^{(2)}x_1^{(2)} + A_2^{(2)}x_2^{(2)} \\ \int_{-1}^{1} x^2|x|dx = \frac{1}{2} = A_0^{(2)}x_0^{(2)2} + A_1^{(2)}x_1^{(2)2} + A_2^{(2)}x_2^{(2)2} \\ \int_{-1}^{1} x^3|x|dx = 0 = A_0^{(2)}x_0^{(2)3} + A_1^{(2)}x_1^{(2)3} + A_2^{(2)}x_2^{(2)3} \\ \int_{-1}^{1} x^4|x|dx = \frac{1}{3} = A_0^{(2)}x_0^{(2)4} + A_1^{(2)}x_1^{(2)4} + A_2^{(2)}x_2^{(2)4} \\ \int_{-1}^{1} x^5|x|dx = 0 = A_0^{(2)}x_0^{(2)5} + A_1^{(2)}x_1^{(2)5} + A_2^{(2)}x_2^{(2)5} \end{cases}$$

Ce système se résout de la même manière que dans l'exercice précédent. On obtient par exemple :

$$A_0^{(2)} = \frac{3}{8},\ A_1^{(2)} = \frac{1}{4},\ A_2^{(2)} = \frac{3}{8},\ x_0^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_1^{(2)} = 0,\ x_2^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

On détermine K en posant $f(x) = x^6$ dans (Q) :

$$\int_{-1}^{1} x^6|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^7)dx + \int_{0}^{1}(x^7)dx = \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6 + \frac{1}{4}(0)^6 + \frac{3}{8}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6 + 720K_2$$

$$\Leftrightarrow K_2 = \frac{1}{25920}.$$

Finalement,

$$(Q_2)\quad \int_{-1}^{1} f(x)|x|dx = \frac{3}{8}f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{8}f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{25920}f^{(6)}(\xi_2),\ \xi_2 \in]-1,1[.$$

- $n=3$. La formule est exacte sur $\mathcal{P}_7$, cela implique le système :

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1|x|dx = 1 = A_0^{(3)} + A_1^{(3)} + A_2^{(3)} + A_3^{(3)} \\ \int_{-1}^{1} x|x|dx = 0 = A_0^{(3)}x_0^{(3)} + A_1^{(3)}x_1^{(3)} + A_2^{(3)}x_2^{(3)} + A_3^{(3)}x_3^{(3)} \\ \int_{-1}^{1} x^2|x|dx = \frac{1}{2} = A_0^{(3)}x_0^{(3)2} + A_1^{(3)}x_1^{(3)2} + A_2^{(3)}x_2^{(3)2} + A_3^{(3)}x_3^{(3)2} \\ \int_{-1}^{1} x^3|x|dx = 0 = A_0^{(3)}x_0^{(3)3} + A_1^{(3)}x_1^{(3)3} + A_2^{(3)}x_2^{(3)3} + A_3^{(3)}x_3^{(3)3} \\ \int_{-1}^{1} x^4|x|dx = \frac{1}{3} = A_0^{(4)}x_0^{(4)4} + A_1^{(4)}x_1^{(4)4} + A_2^{(4)}x_2^{(4)4} + A_3^{(4)}x_3^{(4)4} \\ \int_{-1}^{1} x^5|x|dx = 0 = A_0^{(4)}x_0^{(4)5} + A_1^{(4)}x_1^{(4)5} + A_2^{(4)}x_2^{(4)5} + A_3^{(4)}x_3^{(4)5} \\ \int_{-1}^{1} x^6|x|dx = \frac{1}{4} = A_0^{(4)}x_0^{(4)6} + A_1^{(4)}x_1^{(4)6} + A_2^{(4)}x_2^{(4)6} + A_3^{(4)}x_3^{(4)6} \\ \int_{-1}^{1} x^7|x|dx = 0 = A_0^{(4)}x_0^{(4)7} + A_1^{(4)}x_1^{(4)7} + A_2^{(4)}x_2^{(4)7} + A_3^{(4)}x_3^{(4)7} \end{cases}$$

Ce système se résout de la même manière que dans l'exercice précédent. On obtient par exemple :

$$A_0^{(3)} = A_1^{(3)} = A_2^{(3)} = A_3^{(3)} = \frac{1}{4},\ x_0^{(3)} = -x_2^{(3)} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}},\ x_1^{(3)} = -x_3^{(3)} = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}}.$$

On détermine K en posant $f(x) = x^8$ dans (Q) :

$$\int_{-1}^{1} x^8|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^7)dx + \int_{0}^{1}(x^7)dx = \frac{1}{5} = \frac{7}{36} + 40320K_3$$

$$\Leftrightarrow K_3 = \frac{1}{267360}.$$

Finalement,

$$(Q_3)\quad \int_{-1}^{1} f(x)|x|dx =$$

$$\frac{1}{4}f\left(-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right) + \frac{1}{4}f\left(-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right) + \frac{1}{4}f\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right) + \frac{1}{4}f\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right) + \frac{1}{267360}f^{(8)}(\xi_3),$$

$$\xi_3 \in]-1,1[.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Correction* :

1. On rappelle les résultats suivants relatifs aux formules de quadrature de Gauss :

   Proposition 1.1 *On a $f = P_n + E_n$. D'où*
$$I = \int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b P_n(x)\omega(x)dx + \int_a^b E_n(x)\omega(x)dx.$$
   En utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, il vient
$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f)$$
   où les x_i sont des abscisses d'interpolation à déterminer.
   • *Une condition nécessaire et suffisante pour que la formule de quadrature de Gauss soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$ est que*
$$\int_a^b x^p v_n(x)\omega(x)dx = 0,\ \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$
   où $v_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.
   • *La formule de quadrature de Gauss ne peut être exacte sur $\mathcal{P}_{2n+2}$.*
   • *Pour les méthodes de Gauss, les abscisses x_i sont réelles, distinctes, situées dans $[a, b]$ et uniques. Les points x_i sont les racines du n-ième polynôme Π_n orthogonal pour le poids ω.*
   • *La méthode de quadrature de Gauss est stable et convergente.*
   • $A_i^{(n)} = \int_a^b L_i^{(n)}(x)\omega(x)dx = \frac{1}{v_n'(x_i)}\int_a^b \frac{v_n(x)}{x - x_i}\omega(x)dx$ *où $L_i^{(n)}(x)$ est le i-ème vecteur de la base de Lagrange.*

   Ici $[a, b] = [-1, 1]$ et $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Une CNS pour que la formule (Q) soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$ est donc que
$$\int_{-1}^{1} x^p v_n(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = 0,\ \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}$$
   qui est également équivalente au fait que la suite des polynômes $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale par rapport à la fonction poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne bien-évidemment la suite des polynômes de Tchebychev du premier ordre et on en déduit que $x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i + 1}{2(n + 1)}\pi\right)$.

2. Soit $j \geq 1$. $\delta_{j+1} - 2\cos(\theta_i^{(n)})\delta_j + \delta_{j-1} = \int_0^\pi \frac{1}{\cos(\theta) - \cos(\theta_i^{(n)})}K d\theta$ où
$$\begin{aligned}
K &= \cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_i^{(n)}) - 2\cos(\theta_i^{(n)})\cos(j\theta) - 2\cos(\theta_i^{(n)})\cos(j\theta_i^{(n)}) + \cos((j-1)\theta) - \cos((j-1)\theta_i^{(n)}) \\
&= 2\cos(j\theta)\cos(\theta) - 2\cos(j\theta_i^{(n)})\cos(\theta_i^{(n)}) - 2\cos(\theta_i^{(n)})\cos(j\theta) + 2\cos(\theta_i^{(n)})\cos(j\theta_i^{(n)}) \\
&= 2\cos(j\theta)(\cos(\theta)) - \cos(\theta_i^{(n)})).
\end{aligned}$$
   Ainsi, $\delta_{j+1} - 2\cos(\theta_i^{(n)})\delta_j + \delta_{j-1} = \int_0^\pi 2\cos(j\theta)d\theta = 0$ pour $j \geq 1$.

3. On considère l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence précédente :
$$r^2 - 2\cos(\theta_i^{(n)})r + 1 = 0.$$
   Le discriminant vaut $\Delta = 4(\cos^2(\theta_i^{(n)}) - 1) = -4\sin^2(\theta_i^{(n)}) < 0$. Les racines complexes conjuguées sont donc $\exp(\pm i\theta_i^{(n)})$ d'où $\delta_j = \lambda\cos(j\theta_i^{(n)}) + \mu\sin(j\theta_i^{(n)})$. Avec $j = 0$ et $j = 1$ on détermine
$$\lambda = \delta_0 = 0 \text{ et } \mu = \frac{\delta_1 - \delta_0\cos(\theta_i^{(n)})}{\sin(\theta_i^{(n)})} = \frac{\pi}{\sin(\theta_i^{(n)})}.$$
   Finalement, $\delta_j = \pi\frac{\sin(j\theta_i^{(n)})}{\sin(\theta_i^{(n)})}$, $\forall j \geq 0$.

4. On a
$$\delta_{n+1} = \int_0^\pi \frac{\cos((n+1)\theta) - \cos((n+1)\theta_i^{(n)})}{\cos(\theta) - \cos(\theta_i^{(n)})}d\theta = \int_{-1}^{1} \frac{T_{n+1}(x) - T_{n+1}(x_i^{(n)})}{x - x_i^{(n)}}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx$$

en réalisant le changement de variable $x = \cos(\theta)$ et en rappelant que les polynômes de Tchebychev de première espèce sont définis par $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(n\mathrm{Arccos}(x))$. Comme les $x_i^{(n)}$ sont les racines de $T_n(x)$, on a

$$\delta_{n+1} = \pi\frac{\sin((n+1)\theta_i^{(n)})}{\sin(\theta_i^{(n)})} = \int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Or

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{T'_{n+1}(x_i^{(n)})}\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ et } T'_{n+1}(x_i^{(n)}) = (n+1)\frac{\sin((n+1)\theta_i^{(n)})}{\sin(\theta_i^{(n)})}$$

donc, finalement, on trouve $A_i^{(n)} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin(\theta_i^{(n)})}{\sin((n+1)\theta_i^{(n)})}\pi\dfrac{\sin((n+1)\theta_i^{(n)})}{\sin(\theta_i^{(n)})} = \dfrac{\pi}{n+1}$.

5. **Définition 1.1** *On appelle Noyau de Péano la fonction* $K(t) = \dfrac{1}{n!}E(x \to (x-t)_+^n)$ *où le symbole + en indice signifie que l'on ne garde que les valeurs positives et* $E(x \to f(x))$ *est l'erreur de la formule de quadrature pour la fonction* f.

   Théorème 1.1 *Si le noyau de Péano ne change pas de signe dans* $[a,b]$ *alors* $\exists \alpha \in [a,b]$ *tel que*

$$E(f) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}E(x \to x^{n+1}).$$

   En pratique, on recherche le plus grand degré n validant ce théorème. Dans le cas de la quadrature de Gauss, ce théorème nous permet d'écrire

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!}E(x \to x^{2n+2}) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}\frac{v_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ avec } \alpha \in [a,b].$$

   On a $T_{n+1}(x) = 2^n v_n(x)$ où 2^n est le coefficient de plus haut degré de T_{n+1} (cf. exercice 6 fiche 2). Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$, on a

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)^2}{2^{2n}\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!} \text{ avec } \alpha \in [a,b].$$

Exercice 5

1. • On a vu dans l'exercice 1 de la fiche 3 que $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}D^n[(x^2-1)^n]$. Cette expression permet d'extraire le coefficient a_n de plus haut degré de P_n en fonction de n soit $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

   • Toujours d'après l'exercice 1 de la fiche 3, un calcul explicite de la formule de Leibniz fournit

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j.$$

   On en déduit donc que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-x) = \dfrac{1}{2^n n!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2((-x)-1)^{n-j}((-x)+1)^j = (-1)^n P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. • Il suffit d'intégrer par parties l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\times 1dx = [xP_n^2(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}2xP_n(x)P'_n(x)dx = P_n(1)^2 - (-1)P_n(-1)^2 - \int_{-1}^{1}2xP_n(x)P'_n(x)dx$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = 2 - 2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P'_n(x)dx.$$

   • On utilise la relation de récurrence de l'énoncé. On a

$$(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)P'_n(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P'_n(x)dx - n\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)P'_n(x)dx.$$

   D'après l'exercice 1 de la fiche 3, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1}P'_n(x)P_j(x)dx = 1-(-1)^{n+j}$, $\forall j = 0,\dots,n-1$. Par conséquent, l'égalité précédente devient

$$0=(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)-2n \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)dx=\frac{2n}{2n+1}.$$

Finalement, $\|P_n\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=2-2\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}$.

3. Soit g_i la fonction définie sur $D_i:=\mathbb{R}\backslash\{x_i^{(n)}\}$ par $g_i(x)=\dfrac{P_{n+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}$.

   • Soit $x\in D_i$. On a $P_{n+1}(x)=\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x-x_j^{(n)})$ donc $P_{n+1}'(x)=\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j^{(n)})$ d'après la formule de Leibniz. Ainsi, $P_{n+1}'(x_i^{(n)})=\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(n)}-x_j^{(n)})$. Par conséquent,

$$\frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}=\frac{\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x-x_j^{(n)})}{(x-x_i^{(n)})\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(n)}-x_j^{(n)})}=L_i(x).$$

   • Soit $x\notin D_i$ (donc $x=x_i^{(n)}$). On a alors

$$\lim_{x\to x_i^{(n)}}\frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_i^{(n)})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}=\frac{1}{P_{n+1}'(x_i^{(n)})}\lim_{x\to x_i^{(n)}}\frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(x_i^{(n)})}{x-x_i^{(n)}}=1=L_i(x_i^{(n)}).$$

   La fonction g_i se prolonge donc bien par continuité sur $\mathbb{R}$ en L_i.

4. On sait que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j^{(n)}f(x_j^{(n)})+E_n(f)$ est exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$ donc

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_i^{(n)}}dx=\sum_{j=0}^{n}A_j^{(n)}\frac{P_{n+1}(x_j^{(n)})}{x_j^{(n)}-x_i^{(n)}}=A_i^{(n)}P_{n+1}'(x_i^{(n)}).$$

   Par conséquent, $A_i^{(n)}=\dfrac{1}{P_{n+1}'(x_i^{(n)})}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_i^{(n)}}dx=\int_{-1}^{1}g_i(x)dx.$

5. On a la proposition suivante :

   Proposition 1.2 *$\forall n\geq 1$, P_n est orthogonal à tout polynôme p de degré inférieur ou égal à $n-1$, c'est-à-dire*

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)p(t)dt=0.$$

   Comme $g_i(x)=L_i(x)=\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_j^{(n)}}$, $g_i'(x)$ est un poynôme de degré $n-1$ et donc

$$I:=\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)g_i'(x)dx=0.$$

   Ensuite,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)L_i'(x)dx=[P_{n+1}(x)L_i(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_{n+1}'(x)L_i(x)dx\\ &= \left[\frac{P_{n+1}^2(x)}{(x-x_i^{(n)})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_{n+1}'(x)L_i(x)dx\\ &= \frac{2}{(1-x_i^{(n)2})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}-\int_{-1}^{1}P_{n+1}'(x)L_i(x)dx. \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_{n+1}'(x)L_i(x)dx=\frac{2}{(1-x_i^{(n)2})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}$.

   Enfin,

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{P'_{n+1}(x_i^{(n)})} \frac{(P'_{n+1}(x)(x - x_i^{(n)}) - P_{n+1}(x))}{(x - x_i^{(n)})^2} dx$$

donc

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x) L_i(x) dx = P'_{n+1}(x_i^{(n)}) \int_{-1}^{1} L_i^2(x) dx.$$

ce qui permet d'écrire que

$$\int_{-1}^{1} L_i^2(x) dx = \frac{2}{(1 - x_i^{(n)2}) P'^2_{n+1}(x_i^{(n)})}.$$

Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_i^2(x) dx = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)} L_i^2(x_j^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)} L_i(x_j^{(n)}) = \int_{-1}^{1} L_i(x) dx$, on a bien démontré que

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i^{(n)})} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i^{(n)}} dx = \frac{2}{(1 - x_i^{(n)2}) P'^2_{n+1}(x_i^{(n)})}.$$

6. On utilise la question 5 de l'exercice précédent :

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)^2}{\left(\frac{(2(n+1)!)}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\right)^2} dx = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3} f^{(2n+2)}(\alpha) \text{ avec } \alpha \in [a, b].$$

Exercice 6

1. On procède comme dans les exercices 1, 2 ou 3. On pose

$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t) dt = A_0 g(-1) + A_1 g(1) + A_2 g'(-1) + A_3 g'(1) + K g^{(4)}(\tau),\ \tau \in]-1, 1[.$$

La formule de quadrature est exacte sur $\mathcal{P}_4$, on a donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} 1 dt = 2 = A_0 + A_1 \\ \int_{-1}^{1} t dt = 0 = -A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\ \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3} = A_0 + A_1 - 2A_2 + 2A_3 \\ \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0 = -A_0 + A_1 + 3A_2 + 3A_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \\ A_2 = \frac{1}{3} \\ A_3 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

On détermine K en posant $g(t) = t^4$ dans Q. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5} = (-1)^4 + (1)^4 + \frac{1}{3}(4(-1)^3) - 4(1)^3) + 24K \Leftrightarrow K = \frac{2}{45}.$$

Finalement,

$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t) dt = g(-1) + g(1) + \frac{1}{3}(g'(-1) - g'(1)) + \frac{2}{45} g^{(4)}(\tau),\ \tau \in]-1, 1[.$$

2. On utilise les questions 2 et 3 de l'exercice 2. On a

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) dt.$$

On peut ensuite utiliser la question précédente. Ainsi,

$$(Q') \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + f\left(-\frac{x_{i+1} - x_i}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{3}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)(f'(x_{i+1}) - f'(x_i)) + \frac{2}{45}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^4 f^{(4)}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\tau + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)\right]$$
$$= \underbrace{\frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) + \frac{h^2}{12}(f'(a) + f'(b))}_{I_N(f)} + \frac{h^4}{720}(b - a) f^{(4)}(\xi),\ \xi \in]a, b[.$$

En effet, $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} f^{(4)}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\tau + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) = N f^{(4)}(\xi)$ où $\xi \in]a, b[$ d'après le lemme vu dans l'exercice 2.

3. On le résultat général suivant :

Proposition 1.3 *Si m est l'ordre de la formule de quadrature et si f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}([a,b])$, on note $M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$. Dans ce cas, il existe une constante C indépendante de f et de $[a,b]$ telle que*

$$|I - I_n(f)| \leq CM(b-a)h^{m+1}.$$

On en déduit, puisque l'ordre de la formule de quadrature est $m = 4$ et $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, que $\lim_{h\to 0} |I - I_N(f)| = 0$.

On rappelle la formule composite de Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(a+2jh) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(a+(2j-1)h) + f(b)\right] - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi),\ \xi \in]a,b[.$$

Cette formule est donc (relativement) moins rapide que la formule de l'exercice.

La méthode de Romberg consiste à appliquer à la méthode des trapèzes le procédé d'accélération de la convergence de Richardson. On admet le résultat suivant :

Proposition 1.4 *Si f est de classe C^{2k} sur un segment $[a,b]$ et si $T(h)$ désigne l'approximation de $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des trapèzes pour un pas égal à $h = \dfrac{b-a}{n}$, alors on a le développement limité suivant en 0 :*

$$T(h) = I(f) + a_1h^2 + a_2h^4 + \ldots + a_{k-1}h^{2(k-1)} + \bigcirc(h^{2k})$$

où les coefficients a_i ne dépendent ni de h, ni de n.

Nous allons nous servir de ce développement pour accélérer la convergence de la méthode des trapèzes. On a donc :

$$T(h) = I(f) + a_1h^2 + a_2h^4 + \ldots + a_{k-1}h^{2(k-1)} + \bigcirc(h^{2k}).$$

Par ailleurs :

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + a_1\frac{h^2}{4} + a_2\frac{h^4}{16} + \ldots + a_{k-1}\frac{h^{2(k-1)}}{4^{k-1}} + \bigcirc(h^{2k}).$$

On élimine le terme en h^2 entre ces deux expressions :

$$4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) = 3I(f) + \bigcirc(h^4) \Leftrightarrow \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = I(f) + \bigcirc(h^4).$$

Ainsi,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{4T_{2N}(f) - T_N(f)}{3} = \frac{4}{3}T_{N_1}(f) - \frac{1}{3}T_{N_2}(f) \text{ avec } N_1 = 2N \text{ et } N_2 = N,$$

qui est une approximation d'ordre h^4.

4. D'après la question précédente,

$$R_N(f) - I(f) = \frac{4T_{2N}(f) - T_N(f)}{3} - I(f) = -\frac{1}{4}a_2h^4 - \frac{5}{16}a_3h^6 + \ldots + \bigcirc(h^{2k}) = \bigcirc(h^4).$$

Comme $T_{2N}(f) - I(f) = a_1\dfrac{h^2}{4} + a_2\dfrac{h^4}{16} + \ldots + \bigcirc(h^{2k}) = \bigcirc(h^2)$, on a bien

$$R_N(f) - I(f) = \circ(T_{2n}(f) - I(f)).$$

On peut en conclure que la formule de quadrature $R_N(f)$ (ordre 4) est bien plus rapide que la formule des trapèzes (ordre 2).

Exercice 7

1. D'après (Q_k), $E_k(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} f(x_{i,k})$.
   - On a la
     Définition 1.2 *Une forme linéaire sur un espace vectoriel E sur un corps commutatif K (ou covecteur de E) est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans K. En d'autres termes, on dit que l'application φ de E dans K est une forme linaire si :*
     $$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in K,\ \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y).$$
     Comme $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ E_k(\lambda f + g) = \lambda E_k(f) + E_k(g)$, E_k est une forme linéaire.
   - La forme est continue sur $\mathcal{C}^0([a,b])$ muni de la norme de la convergence uniforme s'il existe une constante C telle que $|E_k(f)| \leq C\|f\|_\infty$. Comme
     $$|E_k(f)| = \left|\int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} f(x_{i,k})\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty\|w\|_\infty + c,\ c \in \mathbb{R}$$