Analyse Numérique

Fiche 6 - Formules de quadrature.

Exercice 1 Soit la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + E(f).$$

Calculer A_0, A_1 et A_2 pour que cette formule de quadrature soit exacte sur l'espace des polynômes de degré le plus élevé possible.

Exercice 2

1. Donner A_0, A_1, x_0, x_1 et K dans la formule de quadrature :
$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t)dt = A_0 g(t_0) + A_1 g(t_1) + K g^{(4)}(\tau),\ \tau \in]-1;1[$$
en supposant que g de classe $\mathcal{C}^4([-1;1])$.
Soit $[a;b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = \dfrac{b-a}{N}$ et $f \in \mathcal{C}^4[a;b]$.
2. Effectuer un changement de variable pour ramener $[x_i; x_{i+1}]$ à $[-1;1]$ et appliquer la formule (Q) à l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.
3. En déduire la formule composite associée à (Q) pour approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 3 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}([-1;1])$. Établir la formule de quadrature suivante pour $n = 1, 2, 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)|x|dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)} + K_n f^{(2n+2)}(\xi_n),\ \xi_n \in]-1;1[.$$

Exercice 4 Pour tout $x \in]-1;1[$, on pose $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on considère la formule de quadrature suivante :

$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) + E_n(f).$$

1. Trouver les $x_i^{(n)}$ pour que la formule (Q) soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$.
On pose $\theta_i^{(n)} = \arccos(x_i^{(n)})$ et on considère $\delta_j = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_i^{(n)})}{\cos(\theta) - \cos(\theta_i^{(n)})} d\theta.$
2. Établir la relation de récurrence
$$\delta_{j+1} - 3\cos(\theta_i^{(n)})\delta_j + \delta_{j-1} = 0 \text{ pour } j \geq 1.$$
Trouver l'expression de δ_j en fonction de j.
3. En déduire que $A_i^{(n)} = \dfrac{\pi}{n+1}$ pour $i = 0, \dots, n$.
4. Montrer que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $[-1;1]$, il existe $\zeta \in]-1;1[$ tel que
$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}.$$

Exercice 5 On considère la formule de quadrature de Gauss-Legendre suivante :

$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) + E_n(f),$$

exacte sur $\mathcal{P}_{2n+1}$, où les $x_i^{(n)}$ sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1} de degré $n+1$. On rappelle que les polynômes de Legendre sont orthogonaux par rapport au produit scalaire

$$< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx,$$

et vérifient la relation à trois termes $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et pour $n \geq 1$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On désigne par L_i le polynôme de Lagrange associé au point x_i, pour $i = 1, \ldots, n$.

1. Donner le coefficient a_n de plus haut degré de P_n en fonction de n. Montrer que $P_n(1) = 1$ et que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer la relation
$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)dx.$$
En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.
3. Soit g_i la fonction définie sur $D_i := \mathbb{R}\backslash\{x_i\}$ par
$$g_i(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_i^{(n)})P_{n+1}'(x_i^{(n)})}.$$
Montrer que la fonction g_i se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en L_i.
4. Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)g_i'(x)dx$. En déduire que pour $i = 0, \ldots, n$, on a
$$A_i^{(n)} = \frac{1}{P_{n+1}'(x_i^{(n)})}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_i^{(n)})}dx = \frac{2}{(1 - x_i^{(n)})^2 P_{n+1}'2(x_i^{(n)})}.$$
5. Montrer que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $[-1;1]$, il existe $\zeta \in]-1;1[$ tel que
$$E_n(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\zeta).$$

Exercice 6

1. Soit g un fonction appartenant à $\mathcal{C}^4[-1;1]$. Établir la formule de quadrature suivante :
$$(Q) \quad \int_{-1}^{1} g(t)dt = g(-1) + g(1) + \frac{1}{3}(g'(-1) - g'(1)) + \frac{2}{45}g^{(4)}(\tau) \text{ avec } \tau \in]-1;1[.$$
Soit $[a;b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{C}^4[a;b]$.
2. Donner la formule de quadrature composite suivante :
$$(Q') \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(b)) + \frac{h^4}{720}(b-a)f^{(4)}(\xi),\ \xi \in]a;b[.$$
3. Écrire une propriété de convergence de cette méthode et comparer cette méthode à celle de Simpson.
Si les valeurs $f'(a)$ et $f'(b)$ sont inconnues, on ne peut pas utiliser la formule (Q'). On pose alors
$$T_N(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \text{ (formule des trapèzes)}$$
4. Montrer que l'on peut obtenir une approximation de $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ d'ordre h^4 en utilisant $T_{N_1}(f)$ et $T_{N_2}(f)$
5. En déduire que si l'on pose $R_N(f) = \dfrac{1}{3}(4T_{2N}(f) - T_N(f))$, alors
$$R_N(f) - I(f) = \circ(T_{2N}(f) - I(f)) \text{ quand } N \to \infty.$$
Que peut-on en conclure ?

Exercice 7 Soit w une fonction poids positive sur l'intervalle borné $[a;b]$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n w$ est intégrable sur $[a;b]$. Soit f une fonction donnée avec fw intégrable sur $[a;b]$, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx$ par la formule de quadrature suivante :

$$(Q_k) \quad \int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k} f(x_{i,k}) + E_k(f), \text{ où } \lambda_{i,k} \text{ et } x_{i,k} \in [a;b]$$

1. Montrer que E_k est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0[a;b]$ muni de la norme de la convergence uniforme. Que vaut sa norme $\|E_k\|_\infty$?
   On suppose que f est un élément de $\mathcal{C}^{n+1}[a;b]$ et que la formule (Q_k) est exacte sur $\mathcal{P}_N$.
2. Montrer que
   $$E_k(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)dt \text{ où } K_N(t) = E_k(x \mapsto (x-t)_+^N)$$
   est la fonction dite de Péano de la formule (Q_k).
3. En déduire une majoration de $|E_k(f)|$.
4. Si de plus K_N garde un signe constant sur $[a;b]$, en déduire qu'il existe $\xi \in [a;b]$ tel que
   $$E_k(f) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} E(x \mapsto x^{N+1}).$$
5. Déterminer et représenter graphiquement le noyau de Péano des formules du rectangle gauche et rectangle milieu. Peut-on appliquer le résultat de la question précédente ?
6. Montrer que si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} |\lambda_{i,k}| \leq M$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} E_k(x^n) = 0$ alors
   $$\lim_{k\to\infty} E_k(g) = 0, \text{ pour toute fonction continue } g \text{ sur } [a;b].$$