Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 8 - Calculs matriciels.

Exercice 1

1. Soit H une matrice telle que $H^2 = 0$. Donner l'inverse de $I + H$.
2. Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Calculer H^2.
3. Donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{i+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable.
2. Trouver les éléments propres de la matrice $A = v.v^T$ où $v \neq 0$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Montrer que : $A^4 = 0 \Rightarrow A^3 = 0$.

Exercice 3

1. Soit $(X^{(n)})_n$ une suite vectorielle de $\mathbb{R}^N$. Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \|X^{(n)} - X\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (X^{(n)} - X|Y) = 0, \ \forall Y \in \mathbb{R}^N.$$
2. Soit $\mathbb{R}^N$ muni de la norme $\|.\|_1$. On considère l'opérateur linéaire A donné par
$$A(X) = (0, x_2, 2x_3, \dots, (N-1)x_N)^T \text{ avec } X = (x_1, \dots, x_N)^T.$$
Calculer la norme $\|A\|_1$.

Exercice 4 Soit B une matrice carrée telle que $\|B\| < 1$ où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée.

1. Montrer que $I + B$ est inversible et que $\|(I+B)^{-1}\| = \dfrac{1}{1 - \|B\|}$.
2. Montrer que les séries matricielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B^k$ convergent.
3. Donner l'inverse de $I + B$.

Exercice 5 Soient A et B deux matrices inversibles telles que $AB = I + E$ avec $\|E\| < 1$ où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée. Montrer la majoration

$$\|A^{-1} - B\| \leq \frac{\|B\|.\|E\|}{1 - \|E\|}.$$

Exercice 6

1. Montrer que toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
2. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On pose $\Lambda_i = \sum_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que

$$sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{ii}, \Lambda_i),$$

   où $D(a_{ii}, \Lambda_i)$ est le disque fermé de centre a_{ii} et de rayon Λ_i.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ de type $n \times n$ avec B de type $m \times m$ et E de type $(n - m) \times (n - m)$. On suppose que B et $E - DB^{-1}C$ sont inversibles. Montrer que A est inversible et trouver son inverse.