Analyse Numérique

Fiche 9 - Méthodes itératives de résolution de systèmes linaires.

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Resoudre par la méthode de Gauss le système linéaire $Ax = b$ et donner une matrice P de permutation telle que $PA = LU$ où L est une matrice triangulaire inferieure avec des "1" sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2 Soit le système linéaire $Ax = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et b un vecteur de $\mathbb{C}^n$. On considère la méthode dite de relaxation

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \ k \geq 1 \end{cases}$$

où $M = \dfrac{1}{\omega}D - E$ inversible et $N = \dfrac{1-\omega}{\omega}D + F$ avec $\omega \in \mathbb{R}^\star$ et $A = M - N = D - E - F$.

1. Montrer que $\det(M^{-1}N) = (1-\omega)^n$.
   En déduire que si la méthode de relaxation converge alors $\omega \in]0;2[$.
   Inversement, on suppose que $\omega \in]0;2[$ et qu'en plus A est hermitienne définie positive.
2. Montrer que $M^\star + N = \dfrac{2-\omega}{\omega}D$ et que $M^\star + N$ est une matrice hermitienne définie positive.
3. Vérifier que $(u|v) = u^\star Av$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$.
4. Montrer que : $\forall v \in \mathbb{C}^n$ on a $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - w^\star(M^\star+N)w$ où $w = M^{-1}Av$ et $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $(.|.)$.
5. Montrer que $\|M^{-1}N\| < 1$ et en déduire que la méthode de relaxation converge.
6. Énoncer un théorème de convergence pour cette méthode.

Exercice 3 Soit A la matrice d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est définie positive.
2. En déduire que le système linéaire $Ax = b$ admet une solution $x^\star$ et une seule.
   Soit $x^{(k)}$ le k-ième vecteur des itérations de la méthode de Gauss-Seidel pour le système $Ax = b$.
3. Écrire l'algorithme permettant le calcul de $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$.
4. On pose $e^{(k)} = x^{(k)} - x^\star$, l'erreur à l'itération k. Montrer que
$$|x_i^{(k+1)} - x_i^\star| \leq \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \|e^{(k)}\|_1 \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$
5. En déduire que la méthode de Gauss-Seidel pour le système $Ax = b$ converge.