LICENCE PRO ACI **Pôle Lamartine - ULCO**

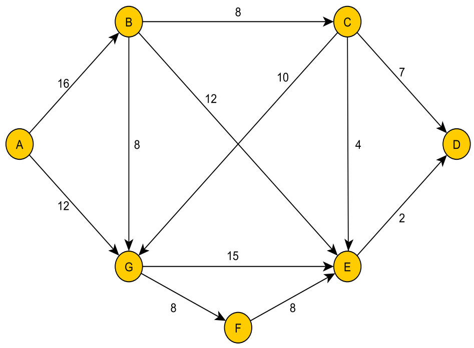
TQAG 10 Octobre 2013 - Contrôle Terminal - Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{7pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Il n'y a que deux sommets de degré impair : G et E. Il existe donc au moins une chaîne eulérienne, c'est-à-dire une chaîne qui passe une seule fois par tous les arcs du graphes. Un exemple : GABGFEGCBEDCE.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Il ne peut pas revenir au point de départ : il n'existe pas de cycle eulérien (deux sommets de degré impair).
3. On a :



(a) $\boxed{2 \times 0,5\text{pt}}$ On dresse à l'aide du diagramme sagittal le dictionnaire des précédents et des suivants :

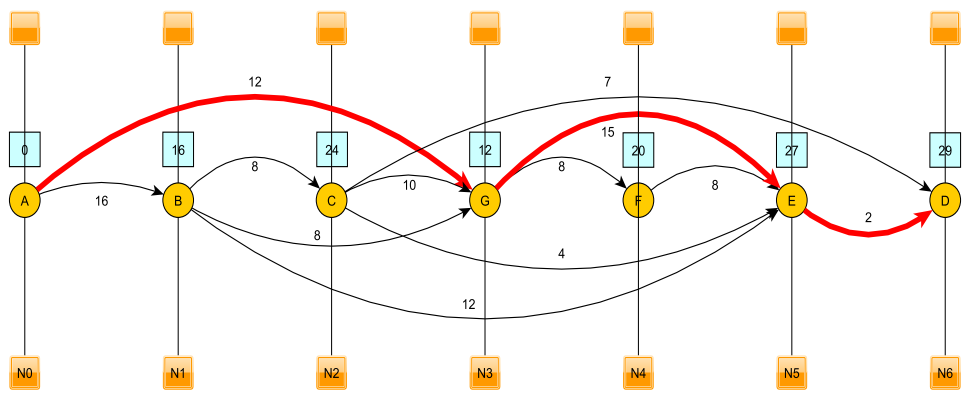
x	P(x)	S(x)
A	–	B, G
B	A	C, E, G
C	B	D, E, G
D	C, E	–
E	B, C, F, G	D
F	G	E
G	A, B, C	E, F

$\boxed{\text{1pt}}$ On en déduit les niveaux

$$N_0 = \{A\},\ N_1 = \{B\},\ N_2 = \{C\},\ N_3 = \{G\},\ N_4 = \{F\},\ N_5 = \{E\},\ N_6 = \{D\}$$

$\boxed{2 \times 0{,}5\text{pt}}$ L'agent peut donc passer par tous les bâtiments pour aller de A à D. Le chemin est qualifié d'hamiltonien.

(b) $\boxed{2 \times 1\text{pt}}$ On utilise l'algorithme de Ford pour le minimum :



$\boxed{\text{0,5pt}}$ Le chemin à suivre est $(AGED)$. Le temps de parcours est de 29 minutes.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{8pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Un réseau de transport est un graphe $G =< X, \mathcal{R} >$ dans lequel les deux conditions suivantes sont respectées :
   - Il existe deux sommets uniques :
     - le sommet source S qui n'admet aucun précédent,
     - le sommet puits T qui n'admet aucun suivant.
   - Chaque arc doit être muni d'une capacité.

   $\boxed{2 \times 0,5\text{pt}}$ Ordonnançons le graphe par niveaux à l'aide des dictionnaires des précédents et des suivants :

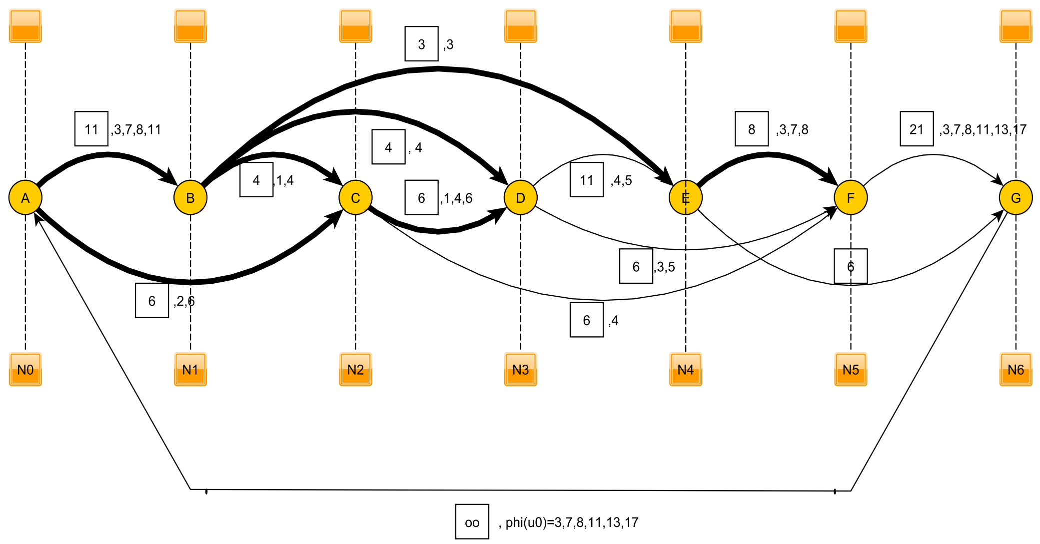
x	P(x)	S(x)
A	–	B, C
B	A	C, D, E
C	A, B	D, F
D	B, C	E, F
E	B, D	F, G
F	C, D, E	G
G	E, F	–

   $\boxed{\text{1pt}}$ On a

$$N_0 = \{A\},\ N_1 = \{B\},\ N_2 = \{C\},\ N_3 = \{D\},\ N_4 = \{E\},\ N_5 = \{F\},\ N_6 = \{G\}.$$

   Le graphe définit donc bien un réseau de transport.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a le graphe ordonnancé suivant :



   $\boxed{\text{2pts}}$ On utilise l'algorithme de Ford-Fulkerson : on considère un flot nul de valeur $\varphi(u_0) = 0$.
   - On détermine tout d'abord les chemins insaturés :
     - (A, B, E, F, G) est insaturé. $\delta = \min(11, 3, 8, 21) = 3 \Rightarrow \varphi(u_0) = 0 + 3 = 3$. L'arc (B, E) est saturé.
     - (A, B, D, E, F, G) est insaturé. $\delta = \min(8, 4, 11, 5, 18) = 4 \Rightarrow \varphi(u_0) = 3 + 4 = 7$. L'arc (B, D) est saturé.
     - (A, B, C, D, E, F, G) est insaturé. $\delta = \min(4, 4, 6, 7, 1, 11) = 1 \Rightarrow \varphi(u_0) = 7 + 1 = 8$. L'arc (E, F) est saturé.
     - (A, B, C, D, F, G) est insaturé. $\delta = \min(3, 3, 5, 6, 13) = 3 \Rightarrow \varphi(u_0) = 8+3 = 11$. Les arcs (A, B) et (B, C) sont saturés.

- (A, C, D, F, G) est insaturé. $\delta = \min(6, 2, 3, 10) = 2 \Rightarrow \varphi(u_0) = 11 + 2 = 13$. L'arc (C, D) est saturé.
- (A, C, F, G) est insaturé. $\delta = \min(4, 6, 8) = 4 \Rightarrow \varphi(u_0) = 13 + 4 = 17$. L'arc (A, C) est saturé.

Il n'existe plus alors de chemins non saturés allant de A à G. Le flot est complet.

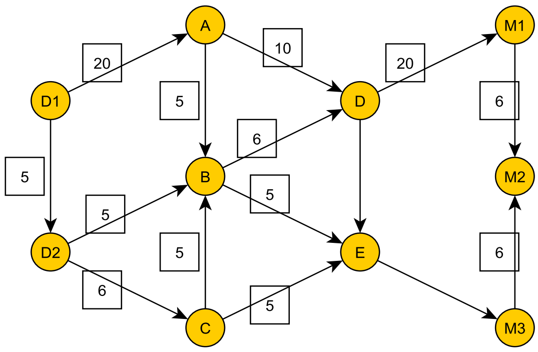
– On détermine ensuite les chaînes insaturées : les deux arcs sortant de A étant saturés, il n'y a pas de chaînes insaturées et donc le flot est maximal, de valeur $\varphi(u_0) = 17$.

$\boxed{\text{1pt}}$ Vérifions la justesse de cette valeur grâce à la capacité minimale de la coupe associée aux sommets marqués. On a $\mathcal{A} = \{A\}$ donc la coupe associée à $\mathcal{A}$ est $\omega^+(\mathcal{A}) = \{(A, B), (A, C)\}$, de capacité $c(\mathcal{A}) = 11 + 6 = 17 = \varphi(u_0)$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Les canalisations saturées à remplacer préférentiellement pour augmenter le flux total de ce réseau sont celles qui interviennent dans des chemins saturés contenant le moins d'arcs saturés possible. Par exemple, si on considère l'arc (A, C) et qu'on augmente la capacité de cet arc, le chemin (A, C, F, G) devient non saturé, ce qui nous permettra d'augmenter la valeur du flot. Dans cette optique, l'arc (C, D) est également intéressant.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

Dans un premier temps, on nomme les sommets du graphe initial :



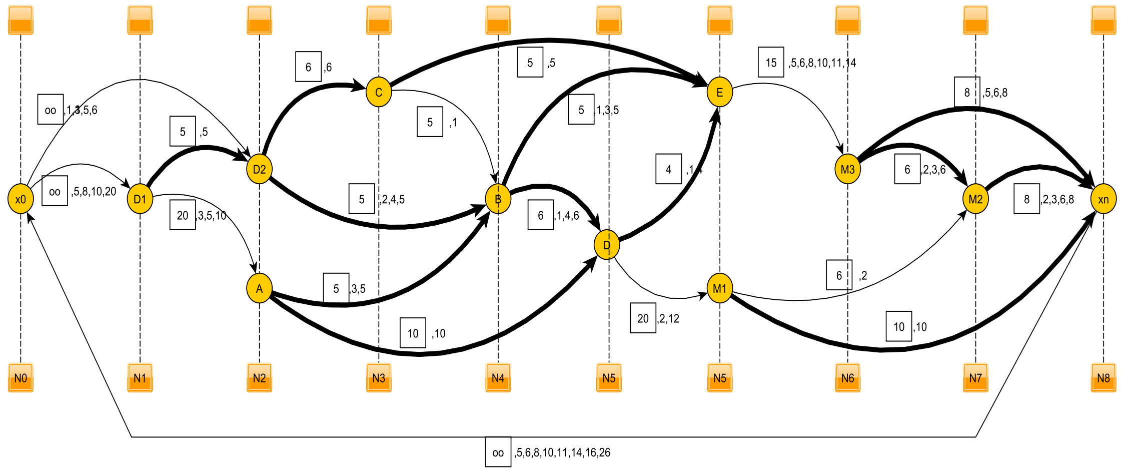
$\boxed{2 \times 0{,}5\text{pt}}$ On crée un sommet fictif d'entrée x_0 relié aux deux entrepôts D_1 et D_2, et un sommet fictif de sortie x_n relié aux clients M_1, M_2 et M_3. On a alors les dictionnaires des suivants et précédents :

x	P(x)	S(x)
x_0	–	D_1, D_2
D_1	x_0	A, D_2
D_2	x_0, D_1	B, C
A	D_1	B, D
B	D_2, A, C	D, E
C	D_2	B, E
D	A, B	E, M_1
E	B, C, D	M_3
M_1	D	M_2
M_2	M_1, M_3	–
M_3	E	M_2
x_n	M_1, M_2, M_3	–

$\boxed{\text{1pt}}$ On obtient donc les niveaux suivants :

$$N_0 = \{x_0\},\ N_1 = \{D_1\},\ N_2 = \{D_2, A\},\ N_3 = \{C\},\ N_4 = \{B\},\ N_5 = \{D\},\ N_5 = \{E, M_1\},\ N_6 = \{M_3\},\ N_7 = \{M_2\},\ N_8 = \{x_n\},$$

$\boxed{\text{1pt}}$ ce qui nous permet de donner ensuite le graphe canonique associé de la page suivante.



$\boxed{\text{2pts}}$ On utilise l'algorithme de Ford-Fulkerson : on considère un flot nul de valeur $\varphi(u_0) = 0$.

- On détermine tout d'abord les chemins insaturés :
  - $(x_0, D_1, D_2, C, E, M_3, M_2, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 5, 6, 5, 15, 6, 8) = 5 \Rightarrow \varphi(u_0) = 0 + 5 = 5$. Les arcs (D_1, D_2) et (C, E) sont saturés.
  - $(x_0, D_2, C, B, E, M_3, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 1, 5, 5, 10, 3) = 1 \Rightarrow \varphi(u_0) = 5 + 1 = 6$. L'arc (D_2, C) est saturé.
  - $(x_0, D_2, B, E, M_3, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 5, 4, 9, 2) = 2 \Rightarrow \varphi(u_0) = 6+2 = 8$. L'arc (M_3, x_n) est saturé.
  - $(x_0, D_2, B, E, M_3, M_2, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 3, 2, 7, 6, 8) = 2 \Rightarrow \varphi(u_0) = 8 + 2 = 10$. L'arc (B, E) est saturé.
  - $(x_0, D_2, B, D, E, M_3, M_2, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 1, 6, 4, 5, 4, 6) = 1 \Rightarrow \varphi(u_0) = 10 + 1 = 11$. L'arc (D_2, B) est saturé.
  - $(x_0, D_1, A, B, D, E, M_3, M_2, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 20, 6, 5, 3, 4, 3, 5) = 3 \Rightarrow \varphi(u_0) = 11 + 3 = 14$. Les arcs (B, D) et (M_3, M_2) sont saturés.
  - $(x_0, D_1, A, B, D, M_1, M_2, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 17, 2, 2, 20, 6, 2) = 2 \Rightarrow \varphi(u_0) = 14 + 2 = 16$. Les arcs (A, B), (D, M_1) et (M_2, x_n) sont saturés.
  - $(x_0, D_1, A, D, M_1, x_n)$ est insaturé. $\delta = \min(\infty, 15, 10, 18, 10) = 10 \Rightarrow \varphi(u_0) = 16 + 10 = 26$. Les arcs (A, D) et (M_1, x_n) sont saturés.

  Il n'existe plus alors de chemins non saturés allant de A à G. Le flot est complet.
- Il n'y a plus de chaînes insaturées et donc le flot est maximal, de valeur $\varphi(u_0) = 26$.

On peut donc satisfaire les demandes des trois clients M_1, M_2 et M_3.

$\boxed{\text{1pt}}$ Vérifions la justesse de cette valeur grâce à la capacité minimale de la coupe associée aux sommets marqués. On a $\mathcal{A} = \{x_0, A, D_1, D_2\}$ donc la coupe associée à $\mathcal{A}$ est $\omega^+(\mathcal{A}) = \{(D_2, C), (D_2, B), (A, B), (A, D)\}$, de capacité $c(\mathcal{A}) = 6 + 5 + 5 + 10 = 26 = \varphi(u_0)$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{2pts}}$

On a

- 1 qui divise $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, soit 12 arcs partant de 1,
- 2 qui divise $2, 4, 6, 8, 10, 12$, soit 6 arcs partant de 2,
- 3 qui divise $3, 6, 9, 12$, soit 4 arcs partant de 3,
- 4 qui divise $4, 8, 12$, soit 3 arcs partant de 4,
- 5 qui divise $5, 10$, soit 2 arcs partant de 5,
- 6 qui divise $6, 12$, soit 2 arcs partant de 6,
- 7 qui divise 7, soit 1 arc partant de 7,
- 8 qui divise 8, soit 1 arc partant de 8,
- 9 qui divise 9, soit 1 arc partant de 9,
- 10 qui divise 10, soit 1 arc partant de 10,
- 11 qui divise 11, soit 1 arc partant de 11,
- 12 qui divise 12, soit 1 arc partant de 12,

ce qui implique le graphe suivant :