Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Contrôle Continu 2006**

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés : calculatrice

(Les quatre exercices sont indépendants)

- **Exercice 1** (*2 points*)

  Un complexe industriel comprend une centrale électrique au fioul et une raffinerie. Pour modéliser les échanges entre les deux unsines et le marché, on évalue les productions avec la même unité, l'euro. On suppose que pour produire 1 euro d'électricité, la centrale utilise 0,55 euros de fioul et 0,10 euro d'électricité. Pour produire 1 euro de fioul, la raffinerie utilise 0,20 euro d'électricité et 0,05 euro de fioul.
  On veut déterminer en euros les productions x d'électricité et y de fioul nécessaires pour que complexe industriel puisse livrer au marché 600000 euros d'électricité et 250000 euros de fioul.

  1. Traduire les données de l'énoncé sous forme d'un système (S).
  2. Calculer x et y.

- **Exercice 2** (*3 points*)

  On veut placer 9400 euros en 3 parties : l'une à 6% l'an, la $2^{\text{ème}}$ à 8% l'an, la $3^{\text{ème}}$ à 10% l'an.
  On se propose de répondre à la question suivante : peut-on choisir ces 3 parts de façon que chacune d'elles produise le même intérêt ?

  1. On note x la $1^{\text{ère}}$ part, y la $2^{\text{ème}}$ et z la $3^{\text{ème}}$. Écrire le système d'équations (S) à résoudre.
  2. Montrer que (S) peut s'écrire sous forme matricielle :
  $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$
  3. Résoudre le système (S) puis répondre à la question posée.

- **Exercice 3** (*7 points*)

  Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes suivantes :
  $$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

  1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3. En déduire les valeurs propres de A. Que représentent les vecteurs X_1, X_2 et X_3 pour A ?
  2. Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
  3. A est-elle inversible ?

- **Exercice 4** (*10 points*)

  Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, I est la matrice unité de même format.

  1. Calculer
  $det(A - XI)$. En déduire que le spectre de A est $\{-2; 1; 2\}$.
  2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans les cas suivants :
     (a) $AX = X$,
     (b) $AX = 2X$,
     (c) $AX = -2X$.

     Que représentent pour A les vecteurs ainsi trouvés ?
  3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible.

(b) Calculer P^{-1}, matrice inverse de P.

4. Calculer $P^{-1}AP$.
   En déduire qu'il existe une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
5. Calculer A^n, n entier naturel non nul.