Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Contrôle Continu 2007**

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés : calculatrice

(Les quatre exercices sont indépendants)

- **Questions de cours** (*3 points*)
  A est une matrice carrée.
  1. Comment obtient-on la transposée de A ?
  2. Comment calcule t-on la trace de A ?
  3. Que signifie :
     (a) λ est une valeur propre de A ?
     (b) X est un vecteur propre de A ?
  4. 0 est valeur propre de A. A est-elle alors inversible ?
- **Exercice 1** (*6 points*)
  Une entreprise fabrique 3 articles A_1, A_2, A_3 à partir de 3 matières M_1, M_2, M_3. Les matières premières sont acheminées vers l'usine par l'intermédiaire d'une société de transport qui facture le coût du transport à l'unité. Les données sont rassemblées dans les tableaux ci-dessous :

	A_1	A_2	A_3
M_1	1	2	4
M_2	2	1	2
M_3	3	2	2

en euros	M_1	M_2	M_3
Coût unitaire hors transport	20	25	15
Coût unitaire en transport	7	6	5

On note A la matrice des matières premières et B celle des coûts.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et interpréter le produit matriciel BA.
2. Une semaine donnée, l'entreprise doit fournir 8 unités de A_1, 12 unités de A_2 et 6 unités de A_3.
   Soit V la matrice suivante : $V = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   Calculer et interpréter le produit AV.
3. Les contraintes d'approvisionnement sont telles que l'entreprise dispose chaque semaine de 70 unités de M_1, 80 unités de M_2, 60 unités de M_3.
   On souhaite savoir s'il existe un schéma de production (x, y, z) (x articles A_1, y articles A_2, z articles A_3) qui utilise la totalité des matières premières.
   (a) Donner une relation entre les matrices suivantes : A, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$.
   En déduire un système d'équations en x, y, et z.
   (b) Vérifier que la matrice A admet pour inverse la matrice suivante :
   $$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -10 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire les valeurs de x, y et z.

(d) Existe t-il un schéma de production (x, y, z) qui utilise la totalité des matières premières ?

- **Exercice 2** (*3 points*)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?

- **Exercice 3** (*8 points*)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits matriciels AX_0, AX_1 et AX_2. En déduire que A admet 3 valeurs propres que l'on précisera. Que peut-on dire des vecteurs X_0, X_1 et X_2 ?
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P est inversible

   (b) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

   (c) Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   En déduire A^n pour n entier naturel non nul.