Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Novembre 2009 - Semestre 1**

Durée de l'épreuve : 1h30 Documents autorisés : calculatrice

- **Exercice 1** (4 points)
  Considérons les matrices
  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
  1. Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$ où I_3 est la matrice unité de format 3×3.
  2. Trouver une formule liant B et B^2.
  3. Trouver une relation entre A, A^2 et I_3 (à l'aide des deux questions précédentes).
  4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

- **Exercice 2** (6 points)
  Soit une matrice A définie par
  $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
  1. Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
  2. Montrer que le polynôme caractéristique P de A vérifie $P(\lambda) = (3 - \lambda)Q(\lambda)$, où $Q(\lambda)$ est un polynôme que l'on déterminera.
  3. Déterminer les valeurs propres de A, leur multiplicité et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

- **Exercice 3** (7 points)
  Une entreprise fabrique trois produits A, B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W.
  La fabrication :
  – d'une unité de A consomme 2 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
  – d'une unité de B consomme 1 unité de U, 2 unités de V et 2 unités de W,
  – d'une unité de C consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W.
  L'entreprise dispose d'un stock de 100 unités de U, 90 unités de V et 100 unités de W.
  Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs
  x : quantité de produit A fabriqué,
  y : quantité de produit B fabriqué,
  z : quantité de produit C fabriqué.
  On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.
  1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir x, y et z puis résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
  2. On s'intéresse au spectre de la matrice M du système.
     Montrer que $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M associés à des valeurs propres qu'on précisera. La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser la matrice de passage P, son inverse et la matrice diagonale D vérifiant la relation $M = PDP^{-1}$.

- **Exercice 4** (3 points)
  Soit A une matrice carrée de taille n. Soit λ une valeur propre de A.
  1. Montrer que λ^2 est valeur propre de A^2.
  2. Montrer que si A est inversible, alors $\lambda \neq 0$ et $1/\lambda$ est valeur propre de A^{-1}.
  3. Montrer que $\lambda + 1$ est valeur propre de $A + I_n$.