ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Avril 2013 - Contrôle Continu, Semestre 2, Session 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Documents interdits.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Une entreprise fabrique trois produits A,B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W. La fabrication :

- d'une unité de A consomme 3 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
- d'une unité de B consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W,
- d'une unité de C consomme 0 unité de U, 1 unité de V et 1 unité de W.

L'entreprise dispose d'un stock de 18 unités de U, 9 unités de V et 10 unités de W.
Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs

. x : quantité de produit A fabriqué,
. y : quantité de produit B fabriqué,
. z : quantité de produit C fabriqué.

On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.

1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir x, y et z.
2. Résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
3. Donner en conclusion la réponse au problème.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & a \\ x+y-z & = & b \\ -x-y+2z & = & c \end{array}\right.$

   (où a, b et c sont des constantes données et x, y et z désignent des inconnues).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Expliquer pourquoi A est inversible et déduire de ce qui précède le calcul de A^{-1}.

Exercice 3 M étant une matrice carrée, on pose $M^1 = M$ et, pour tout entier naturel n non nul, $M^{n+1} = M \times M^n$.

On considère la matrice D définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, D^3 puis D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
2. Étant données les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, montrer que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $P' \times P$. Que peut-on conclure ?
3. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \times D \times P' = A$.
4. Soit n un entier naturel non nul. Sachant que
   $$A^n = (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots (P \times D \times P')$$
   (produit de n facteurs $(P \times D \times P')$), utiliser la question 2. pour montrer que $A^n = P \times D^n \times P'$.
   En déduire les termes de la matrice A^n en fonction de n.