Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Janvier 2007 - Session 1**

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés : calculatrice

(Les trois exercices sont indépendants)

Exercice 1 *Correction* :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La règle de Sarrus permet de calculer le déterminant d'une matrice (carrée) d'ordre 3. La matrice A étant ici d'ordre 4, on ne peut pas appliquer cette règle dans notre cas.
2. On a

$$|A| = \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(1)(-1)^{4+4}}_{1} \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{1+1}}_{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(-1) = -\tfrac{1}{2}.$$

   La valeur $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A car A n'est pas singulière.
3. Posons $v = (1, 1, 1, 1)$ et calculons Av. On obtient

$$Av = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et on voit bien que le vecteur résultant n'est pas proportionnel à v. On ne peut donc pas trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$, ce qui est équivalent à dire que v n'est pas un vecteur propre de A.
4. Soient $b = (12, 14, 8, 10)$ et $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. La matrice A étant inversible, le système est de Cramer et on obtient :

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} 12 & -1 & 0 & 1 \\ 14 & -3 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{-28}{-\frac{1}{2}} = 56, \quad x_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & 12 & 0 & 1 \\ 1/2 & 60 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{-30}{-\frac{1}{2}} = 60,$$
$$x_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 12 & 1 \\ 1/2 & -3 & 14 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{-17}{-\frac{1}{2}} = 34, \quad x_4 = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 12 \\ 1/2 & -3 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}}{|A|} = \frac{-22}{-\frac{1}{2}} = 44.$$

   La solution du système $Ax = b$ est donc $(56, 60, 34, 44)$.
   On ne pouvait pas déduire ce résultat de la question précédente car il n'y a pas de lien direct entre la solution d'un système et ses valeurs ou vecteurs propres.

Exercice 2 *Correction* :

On considère le système (S) ci-dessous provenant d'un modèle économique spécifique

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ y_n & = & 3x_{n-1} - 5y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ z_n & = & 6x_{n-1} - 6y_{n-1} + 4z_{n-1} \end{array} \right.$$

que l'on souhaite résoudre lorsque les données initiales sont $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et $n = 10$.

1. Si on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ on a $(S) \Leftrightarrow X_n = AX_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre (vp) de A si et seulement si $|A - \lambda I| = 0$. On a
$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(2+\lambda)(-1)^{2+1}}_{-(2+\lambda)} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 0 & (4-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda) = (2+\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$
On déduit aisément de l'expression du polynôme caractéristique que -2 (vp double, donc de multiplicité algébrique $\alpha_1 = 2$) et 4 (vp simple, donc de multiplicité algébrique $\alpha_2 = 1$) sont les valeurs propres de A. Les valeurs propres de A n'étant pas toutes distinctes, on ne peut pas affirmer que la matrice A est diagonalisable.
3. • Par définition, $E_{-2} = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = -2X\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_{-2}$, on a alors $AX = -2X$ si et seulement si
$$(A+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 3y + 3z &=& 0 \\ 3x - 3y + 3z &=& 0 \\ 6x - 6y + 6z &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$
Par conséquent, $X = (x, y, z) \in E_{-2}$ si et seulement si
$$X = (y - z, y, z) = (y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \ y, z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Comme $\dim(E_{-2}) = 2 = \alpha_1$, on peut affirmer d'ores et déjà que A est diagonalisable.
• $E_4 = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = 4X\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_4$, on a alors $AX = 4X$ si et seulement si
$$(A-4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x - 3y + 3z &=& 0 \\ 3x - 9y + 3z &=& 0 \\ 6x - 6y &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 2y \end{array} \right. .$$
Par conséquent, $X = (x, y, z) \in E_4$ si et seulement si
$$X = (y, y, 2y) = y(1, 1, 2), \ y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque immédiatement que P contient (en colonnes) des candidats des vecteurs propres de A trouvés précédemment (on a obtenu les 1e et 2e colonnes de P en posant $(y, z) = (1, 0)$ et $(y, z) = (0, -1)$ dans l'équation (1), et la 3e colonne en posant $y = 1$ dans l'équation (2)).
Les vecteurs propres formant naturellement une base de $\mathbb{R}^3$, ils sont linéairement indépendants et la matrice P est donc inversible. On peut cependant s'en convaincre en calculant son déterminant. On a
$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$
Déterminons l'inverse de P à l'aide de la formule de la comatrice :
$$P^{-1} = \tfrac{1}{\det(P)}(\mathrm{Com}(P))^T = \tfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
5. On a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
6. On sait que la solution du système (S) s'écrit alors :
$$X_n = a(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c(4)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
On remarque donc que la solution de (S) s'écrit (et c'est toujours vrai quand la matrice est diagonalisable) comme une combinaison linéaire de vecteurs propres de A pondérée par les puissances n-ièmes des valeurs propres de A multipliées respectivement par les composantes de la solution du système $Z_0 = P^{-1}X_0$, où X_0 décrit les conditions initiales du système.
On a donc facilement

$$X_{10} = \frac{1}{2}(-2)^{10}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0(-2)^{10}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(4)^{10}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 512\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 524288\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}524800\\524800\\1048576\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ <u>*Correction*</u> :

- Déterminons dans un premier temps les valeurs propres de A : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2]$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$
On déduit de l'expression du polynôme caractéristique que $\lambda_1 = 2$ est une valeur propre double ($\alpha_1 = 2$) et $\lambda_2 = 3$ est une valeur propre simple ($\alpha_2 = 1$).
- Si la matrice A n'est pas diagonalisable (ce qu'il faut démontrer), le problème vient nécessairement d'une valeur propre multiple. Déterminons le sous-espace propre $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 2X\}$. Soit $X = (x,y,z) \neq 0$, on a
$$AX = 2X \Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}y=0\\ -y-z=0\\ 2y+2z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}x\in\mathbb{R}\\ y=0\\ z=0\end{array}\right. .$$
Par conséquent, $X \in E_2 \Leftrightarrow X = (x,0,0) = x(1,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $(\dim(E_2) = 1) \neq (\alpha_1 = 2)$ et donc que la matrice A n'est pas diagonalisable.