Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Janvier 2007 - Session 1**

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés : calculatrice

(Les trois exercices sont indépendants)

- **Exercice 1** (*5 points*)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que permet de calculer la règle de Sarrus ? Pourquoi cette règle ne s'applique t-elle pas dans ce cas ?
2. Calculer le déterminant de A. La valeur $\lambda = 0$ est-elle une valeur propre de A ? (On ne demande pas de déterminer le spectre de A !)
3. Prouver que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ n'est pas un vecteur propre de A.
4. Soit $b = (12, 14, 8, 10)$. Trouver à l'aide de la règle de Cramer le vecteur x tel que $Ax = b$. Pouvait-on déduire ce résultat de la question précédente ?

- **Exercice 2** (*10 points*)

On considère le système (S) ci-dessous provenant d'un modèle économique spécifique

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ y_n & = & 3x_{n-1} - 5y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ z_n & = & 6x_{n-1} - 6y_{n-1} + 4z_{n-1} \end{array} \right.$$

que l'on souhaite résoudre lorsque les données initiales sont $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et $n = 10$.

1. Écrire le système précédent sous la forme $X_n = AX_{n-1}$ où $X_n = (x_n, y_n, z_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que -2 et 4 sont les valeurs propres de A. Peut-on affirmer, simplement à l'aide de ce résultat, que la matrice A est diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres E_{-2} et E_4 associés aux valeurs propres -2 et 4 respectivement. Que peut-on conclure sur A ?
4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Après avoir vérifié que la matrice P est inversible, déterminer l'inverse de la matrice P à savoir P^{-1}.
5. Soit le vecteur $X_0 = (1, 1, 1)$. Calculer $Z_0 = (a, b, c)$ tel que $Z_0 = P^{-1}X_0$.
6. On sait que la solution du système (S) s'écrit alors :
$$X_n = a(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c(4)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les composantes de X_n lorsque n vaut 10.

- **Exercice 3** (*5 points*)

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. (On détaillera avec soin les différentes étapes nécessaires).