Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Janvier 2008 - Session 1**

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés : calculatrice

(Les trois exercices sont indépendants)

- **Exercice 1** (*5 points*)

  Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  1. Calculer le déterminant de A. 0 est-il une valeur propre de A ? A est-elle inversible ?
  2. Calculer les valeurs propres de A.
  3. Montrer que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
  4. Sachant que -1 est une valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre E_{-1} qui lui est associé.
  5. A est-elle diagonalisable ?

- **Exercice 2** (*10 points*)

  Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  1. Calculer les valeurs propres de A. Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
  2. Soient les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
     Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A.
     À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
  3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
     (a) Montrer que P est inversible.
     (b) Calculer le produit PQ. En déduire l'inverse P^{-1} de P.
  4. Calculer le produit $P^{-1}AP$. Vérifier que l'on obtient une matrice diagonale D et en déduire A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.
  5. En utilisant la relation trouvée à la question précédente, calculer A^n pour n entier naturel non nul.
  6. <u>Application</u>
     Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par : $\begin{cases} U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n \\ U_0 = 1, U_1 = 1, U_2 = 2 \end{cases}$
     On note $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+3} \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$.
     (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A, de n et de $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
     (b) En utilisant l'expression de A^n trouvée à la question 5., donner l'expression de U_n en fonction de n.

- **Exercice 3** (*5 points*)

  Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 puis B^3.
2. En remarquant que $A = I + B$, calculer A^2 puis A^n, n entier naturel.
   Pour le calcul de A_n, on utilisera la formule suivante :

$$(I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times \ldots n.$$