Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **SESA 3 CG**

Contrôle terminal de MASS **Janvier 2009 - Semestre 1**

Durée de l'épreuve : 2 h 00 Documents autorisés : calculatrice

- **Exercice 1**

1. On souhaite diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres λ_i de la matrice A et vérifier ainsi que $tr(A) = \sum \lambda_i$ et $det(A) = \prod \lambda_i$. Peut-on en déduire à ce stade de l'étude que A est diagonalisable ? Pourquoi ?

   (b) Déterminer les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres précédentes et vérifier que la matrice de passage P (de la base canonique à la base des vecteurs propres de A) peut être donnée par $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Calculer P^{-1} et préciser à quoi est égal le produit $P^{-1}AP$.

   (d) Calculer A^7.

   (e) Calculer A^n pour un entier n quelconque.

   (f) A est-elle inversible ?

2. On considère le problème d'évolution suivant : soit une boîte étanche contenant un liquide. Cette boîte est subdivisée en trois compartiments a, b et c. Les parois entre les compartiments sont d'une porosité (perméabilité) variable. Ainsi on mesure qu'après une journée :
   - la moitié du liquide contenu dans a y est restée, l'autre moitié est passée dans c,
   - la moitié du liquide contenu dans b y est restée, l'autre moitié est passée dans a,
   - la moitié du liquide contenu dans c y est restée, l'autre moitié est passée dans a.

   (a) Dessiner le graphe associé à ce problème d'évolution. Montrer que la matrice d'évolution qu'on notera M est égale à $\frac{1}{2}A$.

   (b) Si, à un moment donné, tout le liquide est dans le compartiment b, quelle sera la répartition après 2 jours ? Après 7 jours ?

   (c) Il existe une répartition Y « idéale » qui reste constante au cours du temps, c'est à dire, jour après jour, la quantité de liquide dans a reste constante et de même pour b et c. Cette répartition Y vérifie donc $MY = Y$. Calculer cette répartition.

   (d) Que dire de la répartition après n semaines d'activité si n est très grand.

- **Exercice 2** On se donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que ces deux matrices ont toutes les deux
   - le même déterminant,
   - une unique valeur propre 1 et
   - un sous-espace propre de dimension 1 engendré par le vecteur propre associé $v_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Pourquoi ces matrices ne sont-elles pas diagonalisables ? A votre, avis, quelle relation lie ces deux matrices ?

2. Montrer que des vecteurs propres généralisés de A associés à la valeur propre 1 peuvent être donnés par $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que si $P = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$ alors $det(P) = \dfrac{1}{64}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

   En déduire alors $P^{-1}AP$.