Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **Licence SESA 3 CG**

Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales **Janvier 2010 - Semestre 1 - Session 1**

Durée de l'épreuve : 1h30 Documents autorisés : calculatrice

- **Exercice 1** (*4 points*)

  Pour chacune des matrices suivantes, déterminer son spectre, les multiplicités (algébriques) des valeurs propres, les dimensions des sous-espaces propres associés et enfin, préciser si la matrice est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Exercice 2** (*8 points*)

  On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}$.

  1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (on doit donc, dans un premier temps, montrer que A admet une valeur propre double, que la dimension du sous-espace associé est de dimension 1, et ensuite, à l'aide d'un vecteur propre généralisé, construire une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = T$).
  2. On considère le système dynamique discret

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{2}{10}u_n - \frac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} & = & \frac{3}{10}u_n + \frac{8}{10}v_n \end{array} \right.$$

     sachant que $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

     (a) Calculer $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

     (b) À l'aide de la question 1., montrer que la solution du système (S) est donnée, pour tout $n \geq 1$, par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & -\frac{1}{2^{n-1}}(1 + \frac{9}{10}n) + 3.\frac{1}{2^n} \\ v_n & = & \frac{1}{2^{n-1}}(1 + \frac{9}{10}n) \end{array} \right.$$

     (c) Calculer ensuite $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

- **Exercice 3** (*8 points*)

  On cherche à réduire (trigonaliser ou idéalement diagonaliser) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

  1. Calculer le déterminant et la trace de A. A est-elle inversible ?
  2. Montrer que A admet une valeur propre double λ_a et une valeur propre simple λ_b, qu'on déterminera. Retrouver à l'aide de ces valeurs propres le déterminant et la trace de A.
  3. Déterminer les sous-espaces propres de A associés à λ_a et λ_b. Montrer ainsi que A n'est pas diagonalisable.

4. Soient $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,-1)$ et $x_3 = (1,1,-2)$. On pose $P = [x_1\ x_2\ x_3]$. Montrer que la matrice inverse de P est donnée partiellement par
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & 1 \\ \star & -1 & \star \end{pmatrix}$$
où $\star$ décrit des valeurs à déterminer.
5. Montrer que le produit $P^{-1}AP$ est égal à
$$\begin{pmatrix} \lambda_a & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_b \end{pmatrix}$$
qu'on appelle la réduite de Jordan.
6. Que doit-on modifier si on souhaite une réduite de Jordan de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_b & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_a & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_a \end{pmatrix}$?

On souhaite résoudre le système
$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & v_n - w_n \\ w_{n+1} & = & 2v_n + 4w_n \end{array} \right.$$
sachant que $(u_0, v_0, w_0) = (1,1,1)$.

7. Calculer $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$.
8. Montrer que la solution générale du système est donnée, pour tout $n \geq 1$, par
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (3.2^n + 3n.2^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2.3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Retrouver à l'aide de cette solution générale les résultats de la question 7.