ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Mai 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 2, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (5 points) *Correction*

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? (On ne demande pas de justifier les réponses.)

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$,
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda).$$
Le polynôme caractéristique s'annule bien pour les éléments diagonaux de A. Les valeurs propres de A sont bien ses éléments diagonaux.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Contre-exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet une seule valeur propre double.
3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. En effet, on sait que pour une matrice B carrée quelconque, on a $\det(B) = \det(B^T)$. Donc, si $B = A - \lambda I$,
$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - (\lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I^T) = \det(A^T - \lambda I).$$
Les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont bien les mêmes.
4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Si 0 est une valeur propre de la matrice A et $\vec{u}$ est un vecteur propre associé, on a
$$A\vec{u} = 0.\vec{u} = \vec{0}.$$
5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI d'après la théorie.
6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. La somme des valeurs propres d'une matrice A est égale à la trace de A, c'est-à-dire la somme et non le produit de ses éléments diagonaux.
7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.
8. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Si λ n'est pas une valeur propre de A (ce que l'énoncé n'interdit pas) alors $A - \lambda I$ n'est pas singulière et l'ensemble des solutions x du système $(A - \lambda I)x = 0$ est réduit au vecteur nul.
9. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Si $A - \lambda I$ n'est pas singulière (ce que l'énoncé n'interdit pas), le système linéaire $(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x$ admet une unique solution qui est la solution $x = 0$.
10. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Si la multiplicité d'une valeur propre λ est 1, alors la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1.

Exercice 2 (9 points) *Correction*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? (On demande de justifier les réponses.)

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Calculons $\det(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{3e ligne}}{=} 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) = 0.$$

Le déterminant de A étant nul, les colonnes de A sont nécessairement des vecteurs linéairement dépendants (et non indépendants).

2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. A étant singulière, A admet pour valeur propre 0.

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. On peut le démontrer de deux façons :
   – en vérifiant que la matrice $A - 2I$ est singulière :
$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,;$$
   – en déterminant les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3e ligne}}{=} (2-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)[(\tfrac{1}{2} - \lambda)^2 - (\tfrac{1}{2})^2] = (2-\lambda)((\tfrac{1}{2} - \lambda) - \tfrac{1}{2})((\tfrac{1}{2} - \lambda) + \tfrac{1}{2}) = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda).$$
   $\lambda = 2$ est donc bien une valeur propre de A puisqu'elle annule le polynôme caractéristique.

4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. On peut le démontrer de deux façons :
   – grâce à la trace de A car on sait que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Ici, $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 3 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \neq 2$. La somme des valeurs propres de A vaut 2 ;
   – grâce à la question précédente, puisqu'on a déterminé toutes les valeurs propres de A, on a $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0 + 1 + 2 = 3 \neq 2$.

5. $\boxed{\text{1pt}}$ VRAI. Déterminons le sous-espace propre E_0 de A associé à la valeur propre $\lambda = 0$: soit $X = (x, y, z) \in E_0$ alors X vérifie
$$(A - 0.I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z & = & 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array} \right. .$$
   Ainsi, tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 s'écrit sous la forme $X = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$, $y \in \mathbb{R}$, et a bien sa 3e coordonnée nulle.

6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Comme -1 n'est pas une valeur propre de A, la matrice $A - (-1)I = A + I$ n'est pas singulière et son rang vaut donc 3.

7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ VRAI. La matrice A admet 1 comme valeur propre donc $A - I$ est singulière et son déterminant est nul.

8. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. Il suffit de vérifier que $A\vec{v} \neq \lambda\vec{v}$. On a
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

9. $\boxed{\text{1pt}}$ VRAI. Il suffit de vérifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On a
$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Donc $(-1, 0, -1)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

10. $\boxed{\text{1pt}}$ VRAI. En effet,
$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
    Donc $(-1, 1, 0)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

11. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. En effet,

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

12. $\boxed{\text{1pt}}$ VRAI. D'après la théorie de la diagonalisation, il existe une matrice de passage P constituée (en colonnes) de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 0,1 et 2 respectivement telle que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. A est donc semblable D.

13. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. En effet, $\lambda = 1$ n'est pas une valeur propre double de A donc il n'existe pas de matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

14. $\boxed{\text{0,5pt}}$ FAUX. C'est A^5 (et non A) qui est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2^5\end{pmatrix}$ car on sait que $A^5 = PD^5P^{-1}$.

Exercice 3 (6 points) *Correction*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}0,2 & -0,3\\0,3 & 0,8\end{pmatrix}$.

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix}0,2-\lambda & -0,3\\0,3 & 0,8-\lambda\end{vmatrix} = (0,2-\lambda)(0,8-\lambda) + 0,09 = \lambda^2 - \lambda + 0,25 = (\lambda - \tfrac{1}{2})^2.$$

A admet donc une valeur propre double $\lambda = \frac{1}{2}$, donc de multiplicité algébrique $\alpha = 2$.

$\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons ensuite le sous-espace propre $E_{\frac{1}{2}} = \{X \in \mathbb{R}^2 / AX = \frac{1}{2}X\}$ associé : soit $X = (x, y) \in E_{\frac{1}{2}}$ alors

$$(A - \tfrac{1}{2}I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-0,3 & -0,3\\0,3 & 0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-0,3x - 0,3y = 0\\0,3x + 0,3y = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = -y\\y \in \mathbb{R}\end{array}\right..$$

Ainsi, $X = (-y, y) = y(-1, 1)$, $y \in \mathbb{R}$. Comme $(\dim(E_{\frac{1}{2}}) = 1) \neq (\alpha = 2)$, A n'est pas diagonalisable.

2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le système se réécrit facilement sous la forme $\underbrace{\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0,2 & -0,3\\0,3 & 0,8\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}}_{U_n}$ ou au rang inférieur $U_n = AU_{n-1}$. En réitérant le procédé, on obtient

$$U_n = AU_{n-1} = A(AU_{n-2}) = A^2U_{n-2} = \ldots = A^nU_0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } U_0 = (u_0, v_0).$$

$\boxed{\text{2pts}}$ Calculons la puissance n-ième de A grâce à la trigonalisation (on rappelle que A n'est pas diagonalisable). Il nous faut déterminer une matrice de passage P dont la première colonne v_1 est obtenue grâce à $E_{\frac{1}{2}}$ (on choisit par exemple $y = 0,3$ et donc $v_1 = (-0,3; 0,3)$). On construit ensuite un vecteur propre généralisé $v_2 = (x, y)$ de A associé à la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$ vérifiant $(A - \frac{1}{2}I)v_2 = v_1$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix}-0,3 & -0,3\\0,3 & 0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-0,3x - 0,3y = -0,3\\0,3x + 0,3y = 0,3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 1 - y\\y \in \mathbb{R}\end{array}\right..$$

Ainsi $v_2 = (1-y, y) = (1, 0) + (-y, y) = (1, 0) + y(-1, 1)$ et on peut choisir $y = 0$ afin que $v_2 = (1, 0)$. Finalement, $P = \begin{pmatrix}-3/10 & 1\\3/10 & 0\end{pmatrix}$ dont l'inverse est égal à $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 10/3\\1 & 1\end{pmatrix}$ vérifie la relation

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = PTP^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -3/10 & 1 \\ 3/10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 10/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1 \\ 3/10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\frac{1}{2^n} & -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ \frac{3}{10}\frac{1}{2^n} & \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} & -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \\ \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} + \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Finalement,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} & -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \\ \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} + \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} & -\frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \\ \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} + \frac{3}{10}\frac{n}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ \frac{9}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = -\frac{9}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ v_n = \frac{9}{10}\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}. \end{aligned}$$

3. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On vérifie aisément que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
4. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Les données peuvent traduire par exemple l'évolution de deux populations qui interagissent. Le vecteur $U_0 = (1, 2)$ traduit les conditions initiales et la relation $U_n = AU_{n-1}$ pour $n \geq 0$ décrit l'évolution dynamique de ces deux populations à intervalles réguliers.

Exercice 4 (2 points) *Correction*

1. • $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.X_1,$
   • $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $AX_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.X_2,$
   • $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $AX_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.X_3.$

   On déduit des 3 calculs précédents que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$ sont les valeurs propres de A, et que X_1, X_2 et X_3 sont les vecteurs propres respectifs associés.
2. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Les 3 valeurs propres étant distinctes, on a bien $\dim(E_{\lambda_i}) = 1 = \alpha_i$ (E_{λ_i} est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i et α_i est la multiplicité algébrique de λ_i), $\forall i = 1, 2, 3$. A est donc diagonalisable.