

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents interdits. Calculatrice autorisée

(Les 4 exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (5 points)

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? (On ne demande pas de justifier les réponses.)

1. Si une matrice est triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
2. Toute matrice a au moins deux valeurs propres distinctes.
3. Les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont les mêmes.
4. Le produit d'une matrice par un de ses vecteurs propres ne peut pas être le vecteur nul.
5. Si une matrice de taille $n \times n$ a n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable.
6. La somme des valeurs propres d'une matrice est égale au produit de ses éléments diagonaux.
7. Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.
8. L'ensemble des solutions x du système $(A - \lambda I)x = 0$ n'est pas réduit au vecteur nul.
9. Le système linéaire $Ax = \lambda x$ admet une solution x non nulle.
10. Si la multiplicité d'une valeur propre λ est 1, alors la dimension du sous-espace propre associé est supérieure strictement à 1.

Exercice 2 (7 points)On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

(On demande de justifier les réponses.)

1. Les colonnes de A sont des vecteurs linéairement indépendants.
2. A admet pour valeur propre 0.
3. A admet pour valeur propre 2.
4. La somme des valeurs propres de A vaut 2.
5. Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa 3e coordonnée nulle.
6. La matrice $A + I$ est de rang 2.
7. Le déterminant de $A - I$ est nul.
8. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .
9. Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .
10. Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .
11. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .

12. A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
13. A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
14. A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (6 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,3 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A n'est pas diagonalisable.
- Résoudre le système dynamique discret $\begin{cases} u_{n+1} = 0,2u_n - 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,3u_n + 0,8v_n \end{cases}$ muni des conditions initiales $(u_0, v_0) = (1, 2)$.
- Calculer ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- Proposer un contexte économique utilisant les données numériques précédentes.

Exercice 4 (2 points)

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes suivantes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer AX_1 , AX_2 et AX_3 . Que peut-on en déduire ?
- A est-elle diagonalisable ?