Université du Littoral Côte d'Opale *janvier 2008- Session 1*

Pôle Lamartine *Durée : 2 heures*

LICENCE SESA3 CG
Mathématiques Appliquées aux sciences sociales

Calculatrices autorisées.

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A. 0 est-il une valeur propre de A ? A est-elle inversible ?
2) Calculer les valeurs propres de A.
3) Montrer que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
4) Sachant que -1 est une valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre E_{-1} qui lui est associé.
5) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de A. Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
2) Soient les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A.
   A quelles valeurs propres sont-ils associés ?

3) Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   a- Montrer que P est inversible.

   b- Calculer le produit PQ. En déduire l'inverse P^{-1} de P.

4) Calculer le produit $P^{-1}AP$. Vérifier que l'on obtient une matrice diagonale D et en déduire A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.

5) En utilisant la relation trouvée à la question précédente, calculer A^n pour n entier naturel non nul.

6) <u>Application</u>

   Soit la suite (Un) définie pour tout entier n par : $\begin{cases} U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n \\ U_0 = 1,\ U_1 = 1, U_2 = 2 \end{cases}$

   On note $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+3} \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$.

   a- Vérifier que $X_{n+1} = A\,X_n$. En déduire X_n en fonction de A, de n et de $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b- En utilisant l'expression de A^n trouvée à la question 5), donner l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 3

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer B^2 puis B^3.

2) En remarquant que A = I + B, calculer A^2 puis A^n , n entier naturel.

Pour le calcul de A^n, on utilisera la formule suivante :

$$(I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \text{ , où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1x2x \dots xn.$$