Université du Littoral-Côte d'Opale
Pôle Lamartine **SESA 3 CG**

Contrôle de MASS **Septembre 2009 - Semestre 1, Session 2**

Durée de l'épreuve : 2 h 00 Documents autorisés : calculatrice

- **Exercice 1** On considère une population répartie entre personnes employées et personnes sans emploi. On note x_n la proportion de la population étudiée qui est employée à la fin de la période n et y_n la proportion qui est sans emploi. On suppose qu'une personne employée a une probabilité de 85% de rester employée à la période suivante et qu'une personne sans emploi a une probabilité de 45% de se retrouver employée à la période suivante. On suppose de plus que la population totale est constante, et qu'initialement (période $n = 0$) 10% de la population est sans emploi.
    1. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
    2. Que valent x_0 et y_0 ? Calculer x_1 et y_1, puis x_2 et y_2.
    3. Calculer le taux de chômage à terme c'est-à-dire la limite de y_n quand $n \to +\infty$. (*Indication* : Si A est la matrice traduisant la transition d'une période à la suivante, on cherchera à diagonaliser A puis on calculera A^n...)

- **Exercice 2** (les trois questions sont indépendantes)
    1. Soit A une matrice carrée. Soit B la matrice obtenue à partir de la matrice A en multipliant sa i-ième ligne par un réel λ. Donner (sans justification) l'expression du déterminant de B en fonction de celui de A.
    2. Soit A une matrice carrée de taille 4. Exprimer $det(3A)$ en fonction de $det(A)$. Justifier la réponse.
    3. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

- **Exercice 3** On considère A la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
    1. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire que le spectre de A est donné par $Sp(A) = \{1, 3\}$. Peut-on en déduire que A est diagonalisable ?
    2. Soient v_1, v_2 et v_3 définis respectivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Calculer Av_1, Av_2 et Av_3. Que peut-on en déduire sur la nature de v_1, v_2 et v_3 ? Quelles conclusions tire t-on concernant A ?
    3. Soit P la matrice carrée d'ordre 3 définie par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
        (a) Que représente P ? Préciser les produits $P^{-1}AP$ et PDP^{-1}.
        (b) Calculer explicitement P^{-1} puis en « déduire » A^5.