

• **Exercice 1**

Le fabricant de stylos Bic, concurrent de Pilot et de Waterman mène une enquête pour savoir comment évoluent mensuellement les acheteurs de ces stylos après l'action des campagnes publicitaires en faveur des stylos Bic. On suppose que chaque individu de la population achète soit un stylo Bic, soit un stylo Pilot ou Waterman. Initialement, dans l'achat de ces différents stylos, l'ensemble des consommateurs se partage comme suit : 20% pour les stylos Bic, 50% pour les stylos Pilot et 30% pour les stylos Waterman.

Chaque mois de publicité fait que :

- 80% des clients de stylos Bic restent clients de stylos Bic, 10% deviennent clients des stylos Pilot et 10% deviennent des clients des stylos Waterman.
- 70% des clients de stylos Pilot restent clients de stylos Pilot, 20% deviennent clients des stylos Bic et 10% deviennent des clients des stylos Waterman.
- 60% des clients de stylos Waterman restent clients de stylos Waterman, 30% deviennent clients des stylos Bic et 10% deviennent des clients des stylos Pilot.

1. Les choix des clients obéissent à une “chaîne de Markov finie”. Montrer que la matrice des probabilités de transformation des “états” Bic, Pilot et Waterman pour les consommateurs pris au hasard est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que , la campagne publicitaire se poursuivant, les probabilités des passage restent constantes (même conjoncture économique, absence de réaction des concurrents, comportement stable des consommateurs...). Trouver après 2 mois la nouvelle répartition des acheteurs.
3. Existe t-il une répartition limite? Afin de répondre à cette question, on traitera les points intermédiaires suivants ;

- (a) Montrer que A admet pour valeurs propres 1, 0,5 et 0,6. Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
- (b) Vérifier que des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres précédentes sont donnés respectivement par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Si $P = [v_1 v_2 v_3]$, montrer que $P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -16 \\ -5 & 15 & -5 \end{pmatrix}$.

- (d) Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$, montrer que $A = PDP^{-1}$.

- (e) Calculer A^n puis en déduire la répartition limite (on fera tendre n vers l'infini). Cette répartition limite est-elle fonction de la répartition initiale ?

• **Exercice 2**

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Tournez S.V.P.

Candidat	A	B	C
Mathématiques	7	11	11
Anglais	12	6	16
Informatique	6	10	14
Moyenne	8	9	14

Retrouvez les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ? Pourquoi ?

• **Exercice 3**

Une entreprise fabrique des manteaux. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu, et d'une doublure noire. Le tableau suivant résume la quantité de chaque tissu nécessaire à la confection du manteau en tailles S, M, L et XL.

Taille	S	M	L	XL
Tissu rouge	$0,4 \text{ m}^2$	$0,5 \text{ m}^2$	$0,6 \text{ m}^2$	$0,7 \text{ m}^2$
Tissu bleu	1 m^2	$1,1 \text{ m}^2$	$1,2 \text{ m}^2$	$1,3 \text{ m}^2$
Doublure	$1,5 \text{ m}^2$	$1,7 \text{ m}^2$	$1,9 \text{ m}^2$	$2,1 \text{ m}^2$

Chaque tissu est tissé à l'aide de plusieurs types de fil : coton, polyamide, et polyester. Le tableau suivant résume les longueurs de fil de chaque type nécessaire par mètre carré de tissu.

Tissu	rouge	bleu	doublure
Coton	500 m	400 m	1000 m
Polyamide	1000 m	900 m	700 m
Polyester	500 m	600 m	0

1. L'entreprise veut produire a manteaux taille S, b manteaux taille M, c manteaux taille L et d manteaux taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ? Répondre à cette question dans le langage des matrices.
2. En fin d'année, l'entreprise veut écouler entièrement ses stocks de fils. Il lui reste 100.000 m de coton et de polyamide, et 20.000 m de Polyester. Peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ?