ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Juin 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 2, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée

(Les 3 exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (6 points)

Considérons une économie qui ne produit que ce qui est nécessaire pour continuer à subsister. Supposons qu'elle ne comporte que trois biens produits selons les relation suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 240 \text{ quintaux de blé } + 12 \text{ tonnes de fer } + 18 \text{ porcs} & \rightarrow & 450 \text{ quintaux de blé} \\ 90 \text{ quintaux de blé } + 6 \text{ tonnes de fer } + 12 \text{ porcs} & \rightarrow & 21 \text{ tonnes de fer} \\ 120 \text{ quintaux de blé } + 3 \text{ tonnes de fer } + 30 \text{ porcs} & \rightarrow & 60 \text{ porcs} \end{array}\right.$$

Les porcs et le blé ne servent pas directement à produire le fer. Ils nourissent cependant les travailleurs nécessaires pour produire le fer. Mais on les intégrera dans le modèle comme des biens nécessaires pour la production du fer. Notons que cette économie ne dégage aucun surplus pour la consommation. Les 450 quintaux de blé produits sont totalement utilisés dans la production : 240 quintaux servent dans la production du blé, 90 quintaux dans la production du fer, et 120 quintaux dans l'élevage des porcs. Il en est de même pour les 21 tonnes de fer et les 60 porcs.
Soient p_1, p_2, et p_3 les prix respectifs d'un quintal de blé, d'une tonne de fer, et d'un porc. Comme l'économie ne dégage aucun surplus, elle n'a pas le moyen de dégager un bénéfice de sa production globalement. Donc un bénéfice dans un secteur serait compensé par un déficit dans un autre, ce qui augmenterait ses prix, et les prix évolueraient alors vers un équilibre où les dépenses de chaque secteur sont égales à ses recettes.

1. Traduire les données de l'énoncé sous la forme d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.
2. À l'aide du déterminant du système, vérifier que le système admet une unique solution.
3. À l'aide de 3 techniques différentes (pivot de Gauss, Cramer et calcul de l'inverse), déterminer la solution du système.

Exercice 2 (6 points)

Trois produits de consommation courante A_1, A_2 et A_3 sont en concurrence sur le marché. Au 1er janvier 2000, une enquête réalisée sur un échantillon représentatif de consommateurs a donné les résultats suivants : 30% des personnes interrogées ont déclaré consommer A_1, 50% A_2 et 20% $A3$. Ces valeurs seront notées respectivement p_0, q_0 et r_0, et l'on appellera "état initial du marché" le vecteur $X_0 = (p_0, q_0, r_0) \in \mathbb{R}^3$.
Les fabricants du produit A_1 lancent une campagne publicitaire d'un mois le 1er janvier 2000. Une enquête réalisée le 1er février 2000 sur le même échantillon a donné les résultats suivants :

- parmi les clients de A_1 au 1er janvier,
  - 80% continuent d'acheter A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_2,
  - 10% deviennent acheteurs de A_3,
- parmi les clients de A_2 au 1er janvier,
  - 60% continuent d'acheter A_2,
  - 30% deviennent acheteurs de A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_3,
- parmi les clients de A_3 au 1er janvier,
  - 70% continuent d'acheter A_3,
  - 20% deviennent acheteurs de A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_2.

1. On note $X_1 = (p_1, q_1, r_1)$ l'état du marché au 1er février 2000. Montrer qu'il existe une matrice carrée M telle que $X_1 = MX_0$.

2. On suppose que la campagne publicitaire continue et que, mois par mois, ses effets restent identiques à ceux du premier mois. On note $X_n = (p_n, q_n, r_n)$ l'état du marché après n mois de campagne publicitaire. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n.
3. Vérifier que 1, $0,5$ et $0,6$ sont valeurs propres de M (on ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique de la matrice !).
4. Soit (V_1, V_2, V_3) une base de vecteurs propres de M. Exprimer X_n en fonction de n et des coordonnées de X_0 dans la base (V_1, V_2, V_3) (que l'on ne demande pas de calculer).
5. Quel est l'état du marché quand $n \to +\infty$?

Exercice 3 (8 points)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Trouver les valeurs propres de A.
   (b) La matrice A est-elle inversible ?
   (c) Est-elle diagonalisable ?
   (d) Quelles égalités impliquant le déterminant de A et sa trace sont vérifiées par les valeurs propres de A ?
2. On pose $B = A - 3I_3$.
   (a) Calculer B^2.
   (b) En déduire A^n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.