CORRECTION Exercices Diagonalisation - Chapitre 1

Exercice 1 Soient x et y les deux parties du capital (placées respectivement à 6% et 8%). On a le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 50000 \\ 0,06x+0,08y &=& 0,068\times 50000 \end{array}\right.$$

On obtient aisément (par substitution ou par combinaison) $(x,y)=(30000,20000)$.

Exercice 2

1. F est une primitive de f si et seulement si $F'(x)=f(x)$. On a
$F'(x)=a\ln(x)+ax\dfrac{1}{x}+b\dfrac{1}{x-1}+c\dfrac{1}{x+1}=a\ln(x)+a+\dfrac{b(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+1)}=a\ln(x)+a+\dfrac{(b+c)x+(b-c)}{x^2-1}$.
Par identification avec $f(x)$, on obtient
$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& -2 \\ b+c &=& 0 \\ b-c &=& 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -2 \\ b &=& 1 \\ c &=& -1 \end{array}\right.,$$
ce qui permet d'affirmer que $F(x)=-2x\ln(x)+\ln(x-1)-\ln(x+1)$ est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.
2. $\displaystyle\int_2^3\left(-2\ln(x)+\frac{2}{x^2-1}-2\right)dx=[-2x\ln(x)+\ln(x-1)-\ln(x-1)]_2^3=(-6\ln(3)+\ln(2)-\ln(4))-(-4\ln(2)+\ln(1)-\ln(3))=-5\ln(3)+3\ln(2)$ car $\ln(1)=0$ et $\ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2)$.

Exercice 3

1. On regroupe les valeurs de l'énoncé dans un tableau :

Unités \ Produits	A	B	C	Stocks
U	3	2	0	18
V	1	2	1	9
W	2	1	1	10

Si (x,y,z) désigne le programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles, x,y,z doivent vérifier le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 18 \\ x+2y+z &=& 9 \\ 2x+y+z &=& 10 \end{array}\right.$.

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :
$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y &=& 18 & (L_1) \\ x+2y+z &=& 9 & (L_2) \quad\leftarrow\quad 3(L_2)-(L_1) \\ 2x+y+z &=& 10 & (L_3) \quad\leftarrow\quad 3(L_3)-2(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y &=& 18 & (L_1) \\ 4y+3z &=& 9 & (L_2) \\ -y+3z &=& -6 & (L_3) \quad\leftarrow\quad 4(L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 18 \\ 4y+3z &=& 9 \\ 15z &=& -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4 \\ y &=& 3 \\ z &=& -1 \end{array}\right..$$
3. Il ne peut exister de programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles puisqu'il faudrait produire -1 quantité de produit C (ce qui est impossible puisque la valeur est négative). Le système (S) admet bien une solution mathématique mais non interprétable au sens économique.

Exercice 4

1. Afin de répondre à cette question, nous devons résoudre le système linéaire suivant
$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z &=& 2000 & (L_1) \\ 1,5x+1,5y+4,5z &=& 2400 & (L_2) \\ 1,5x+2,5y+1,5z &=& 2400 & (L_3) \end{array}\right.$$

traduisant le problème. Vérifions dans un premier temps que le système est inversible, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution. On calcule pour cela le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1,5 & 1,5 & 4,5 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, le système est inversible, il admet une unique solution. On peut maintenant utiliser la méthode du pivot de Gauss en multipliant au préalable les lignes (L_2) et (L_3) du système par 2. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) & \\ 3x+3y+9z & = & 4800 & (L_2) & \leftarrow \quad (L_2)-3(L_1) \\ 3x+5y+3z & = & 4800 & (L_3) & \leftarrow \quad (L_3)-3(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) & \\ -3y-3z & = & -1200 & (L_2) & \\ -y-9z & = & -1200 & (L_3) & \leftarrow \quad 3(L_3)-(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) \\ -3y-3z & = & -1200 & (L_2) \\ -24z & = & -2400 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x & = & 1000 & (L_1) \\ y & = & 300 & (L_2) \\ z & = & 100 & (L_3) \end{array}\right. .$$

Il existe donc bien un programme de fabrication utilisant à plein les capacités de chaque atelier, générant 1000 lots de pièces A, 300 lots de pièces B et 100 lots de pièces C.

2. (a) On souhaite déterminer le bénéfice réalisé lors de la vente de 800 pièces de A, 200 pièces de B et 200 pièces de B, c'est-à-dire de 80 lots de pièces A, 20 lots de pièces B et 20 lots de pièces C, sachant qu'un lot est constitué de 10 pièces. Le bénéfice est obtenu en soustrayant aux revenus les coûts de fabrication. On a donc

$$\begin{array}{rcl} B(80,20,20) & = & 80 \times [335 - (1 \times 60 + 1,5 \times 80 + 1,5 \times 50)] \\ & + & 20 \times (515 - [2 \times 60 + 1,5 \times 80 + 2,5 \times 50]) \\ & + & 20 \times [925 - (4 \times 60 + 4,5 \times 80 + 1,5 \times 50)] \\ & = & 14400 \end{array}.$$

   (b) Pour le programme trouvé au 1., on trouve

$$\begin{array}{rcl} B(1000,300,100) & = & 1000 \times [335 - (1 \times 60 + 1,5 \times 80 + 1,5 \times 50)] \\ & + & 300 \times (515 - [2 \times 60 + 1,5 \times 80 + 2,5 \times 50]) \\ & + & 100 \times [925 - (4 \times 60 + 4,5 \times 80 + 1,5 \times 50)] \\ & = & 150000 \end{array}.$$

Exercice 5

1. On a le système

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} 10x+4y+10z & = & a \\ 2x+y+2z & = & p \\ 10x+6y+12z & = & t \end{array}\right. .$$

2. On remplace a par 4200, p par 800 et t par 5000 dans (S). Vérifions que le système est inversible :

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 10 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, le système est inversible, il admet une unique solution. On peut maintenant utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre (S).

$$\left\{\begin{array}{rclll} 10x+4y+10z & = & 4200 & (L_1) & \\ 2x+y+2z & = & 800 & (L_2) & \leftarrow \quad 5(L_2)-(L_1) \\ 10x+6y+12z & = & 5000 & (L_3) & \leftarrow \quad (L_3)-(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclll} 10x+4y+10z & = & 4200 & (L_1) & \\ y & = & -200 & (L_2) & \leftarrow \quad (L_3) \\ 2y+2z & = & 800 & (L_3) & \leftarrow \quad (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 10x+10z+4y & = & 4200 & (L_1) \\ 2z+2y & = & 800 & (L_2) \\ y & = & -200 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -100 \\ z & = & 600 \\ y & = & -200 \end{array}\right. .$$

Par conséquent, il n'existe pas de production permettant d'utiliser exactement 4200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5000 heures de travail. Le système admet bien une solution numérique mais elle n'est pas interprétable économiquement.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ D'après l'énoncé, $a = -30000$, $b = 100$, $c = -4000$, $d = 50$, $e = 4000$, $f = -9$, $g = 34$, $h = 3560$, $i = 27$, $j = -136$ et les prix d'équilibre vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (100-(-9))P_1 - 34P_2 & = & 4000-(-30000) \\ -27P_1 + (50-(-136))P_2 & = & 3560-(-4000) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 109P_1 - 34P_2 & = & 34000 \\ -27P_1 + 186P_2 & = & 7560 \end{array}\right. .$$

Une résolution rapide de ce système nous donne $(x, y) = (340, 90)$. Les prix d'équilibre P_1 et P_2 sur ce marché en considérant le modèle de Walras sont respectivement égaux à 340 et 90 euros.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$

1. Résoudre $Ax = b$ revient donc à résoudre $(LU)x = L(Ux) = b$. En posant $z = Ux$, l'équation matricielle précédente s'écrit $Lz = b$ qu'on peut résoudre si L est inversible. Une fois z calculé, on résout le système $Ux = z$ (si U est inversible) afin de trouver x. Résoudre deux sytèmes triangulaires est au final moins coûteux que de résoudre le système initial.
2. • – Déterminons la factorisation LU de A :
   (a) Étape 1.
   $$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix},\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_1^{-1} = L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) Étape 2.
   $$E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ E_2^{-1} = L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   d'où $U = E_2E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $L = L_1L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = LU$.
   – Résolvons successivement les systèmes $Lz = b$ et $Ux = z$.
   (c) Étape 3.
   $$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ 2z_1 + z_2 & = & 1 \\ -3z_1 - z_2 + z_3 & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ z_2 & = & -3 \\ z_3 & = & -3 \end{array}\right.$$
   (d) Étape 4.
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ -2x_2 + 3x_3 & = & -3 \\ 3x_3 & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$
   La solution du système est $(1, 0, -1)$.

   • Le second système utilise la même matrice que précédemment. On ne réalise donc que les étapes 3 et 4.
   (a) Étape 3.
   $$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ 2z_1 + z_2 & = & 8 \\ -3z_1 - z_2 + z_3 & = & -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ z_2 & = & 4 \\ z_3 & = & 6 \end{array}\right.$$
   (b) Étape 4.
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ -2x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ 3x_3 & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$
   La solution du système est $(-1, 1, 2)$.

   • – Déterminons la factorisation LU de A :
   (a) Étape 1.
   $$A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ -10 & -9 & 5 \end{pmatrix},\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_1^{-1} = L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) Étape 2.
   $$E_1A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ E_2^{-1} = L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $U = E_2E_1A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = L_1L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = LU$.

– Résolvons successivement les systèmes $Lz = b$ et $Ux = z$.

(c) Étape 3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 7 \\ -z_1 + z_2 & = & -10 \\ -2z_1 + 3z_2 + z_3 & = & -24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 7 \\ z_2 & = & -3 \\ z_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

(d) Étape 4.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 7 \\ -x_2 + 2x_3 & = & -3 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

La solution du système est $(1, 1, -1)$.

- Le quatrième système utilise la même matrice que précédemment. On ne réalise donc que les étapes 3 et 4.

(a) Étape 3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ -z_1 + z_2 & = & -5 \\ -2z_1 + 3z_2 + z_3 & = & -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 2 \\ z_2 & = & -3 \\ z_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

(b) Étape 4.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_2 + 2x_3 & = & -3 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

La solution du système est $(0, 1, -1)$.

Exercice 8

1. On a

$$\left\{\begin{array}{rcll} x + 2y - 3z & = & a & (L_1) \\ x + y - z & = & b & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ -x - y + 2z & = & c & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x + 2y - 3z & = & a & (L_1) \\ -y + 2z & = & b - a & (L_2) \\ y - z & = & c + a & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x + 2y - 3z & = & a & (L_1) \leftarrow (L_1) + 3(L_2) \\ -y + 2z & = & -a + b & (L_2) \leftarrow -(L_2) + 2(L_3) \\ z & = & b + c & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x + 2y & = & a + 3b + 3c & (L_1) \leftarrow (L_1) - 2(L_2) \\ y & = & a + b + 2c & (L_2) \\ z & = & b + c & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -a + b - c \\ y & = & a + b + 2c \\ z & = & b + c \end{array}\right.$$

2. Résoudre un système linéaire comme celui qui précède, c'est-à-dire dont le second membre est inconnu, consiste à inverser la matrice du système. On peut réécrire l'équivalence précédente sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, le système étant inversible, A est inversible, A^{-1} existe et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. La matrice $B = PA = \begin{pmatrix} 60 & 15 & 18 \\ 54 & 18 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 765 & 561 & 501 \\ 710 & 518 & 464 \end{pmatrix}$ représente les coûts totaux (en euros) subis par les 3 entreprises E_1, E_2, E_3 relatifs aux 2 fournisseurs F_1, F_2. Par exemple $b_{11} = 765$ est le coût en euros subi par l'entreprise E_1 relativement au fournisseur F_1.
2. $\det(A) = 5 \neq 0$ donc A est une matrice inversible.
3. On montre facilement que

$$A' \times A = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & 0,6 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \times A',$$

ce qui confirme que A est inversible et que son inverse est A'.

4. (a) $AX = \begin{pmatrix} 10x+8y+7z \\ 5x+3y+3z \\ 5x+2y+2z \end{pmatrix}$ représente les quantités totales de ciment, sable et gravillons nécessaires à la réalisation des différents chantiers.

   (b) $AX = \begin{pmatrix} 156 \\ 67 \\ 53 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 156 \\ 67 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Les entreprises E_1, E_2, E_3 doivent intervenir sur respectivement 5, 8 et 6 chantiers afin d'utiliser 156 tonnes de ciment, 67 m^3 de sable et 53 m^3 de gravillons.

Exercice 10

1. $\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc M n'est pas inversible, c'est une matrice singulière (on remarque par exemple que $c_1 = 2c_2 - c_3$).
2. (a) $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

   Montrons par récurrence que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 3$. On vient de montrer que $M^3 = 0$. Supposons que $M^n = 0$ pour $n \geq 3$. On a alors $M^{n+1} = M \times M^n = M \times 0 = 0$. Par conséquent, $M^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

   (c) $(I - M)(I + M + M^2) = I.I + I.M + I.M^2 - M.I - M.M - M.M^2 = I + M + M^2 - M - M^2 - M^3 = I.$

   (d) Posons $\mathcal{M} = I - M$ et $\mathcal{M}' = I + M + M^2$. On a d'après la question précédente $\mathcal{M}\mathcal{M}' = I$ ce qui signifie que $\mathcal{M}$ est inversible et que son inverse est donné par $\mathcal{M}'$. Avec les notations initiales, la matrice $I - M$ est inversible et

   $$(I-M)^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. On obtient aisément
   - $D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,
   - $D^3 = D \times D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$.
   - Montrons par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque. La relation est vraie au rang $n = 0$ car $D^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^0 \end{pmatrix}$. Supposons que la relation soit vraie au rang n. On a alors $D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$. La relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On vérifie immédiatement par multiplication matricielle que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

   On montre de même que $P' \times P = I$. Cela signifie que P est inversible et que P' est la matrice inverse de P.
3. En utilisant à nouveau la multiplication matricielle, on a

   $$P \times D \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$
4. On a

   $$\begin{aligned} A^n &= (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots \times (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \\ &= P \times D \times \underbrace{(P' \times P)}_{I} \times D \times (P' \times \ldots \times P) \times D \times \underbrace{(P' \times P)}_{I} \times D \times P' \\ &= P \times \underbrace{D \times D \times \ldots \times D \times D}_{n \text{ fois}} \times P' = P \times D^n \times P'. \end{aligned}$$

   On en déduit que
   $$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2})^n \\ 1 & (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$

1. On a $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. D'après l'énoncé,

   - $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
   - $f(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
   - $f(\vec{e_3}) = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On en déduit la matrice A de f rapportée à la base $\mathcal{B}$: $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$.

   On a également

   - $g(\vec{e_1}) = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   - $g(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   - $g(\vec{e_3}) = 3\vec{e_1} - \vec{e_2} - 2\vec{e_3} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   On en déduit la matrice B de g rapportée à la base $\mathcal{B}$: $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\vec{e_1}) & g(\vec{e_2}) & g(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$.

2. - $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
   - $3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,
   - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,
   - $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. (a) $A^2 = xA + yI \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2x & 2x \\ 2x & x+y & 2x \\ 2x & 2y & x+y \end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 9 \\ 2x & = & 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4 \\ y & = & 5 \end{array} \right.$
   Conclusion, $A^2 = 4A + 5I$.

   (b) $A^2 = 4A + 5I \Leftrightarrow A^2 - 4A = 5I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{5}(A - 4I)\right)$. On déduit de cette dernière égalité que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I) = \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
   Ensuite, $A^3 = A^2 \times A = (4A + 5I)A = 4A^2 + 5A = 4(4A + 5I) + 5A = 21A + 20I$.

(c) Le système se réécrit $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, ce qui implique donc que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9\\4\\-6\end{pmatrix}.$$

4. Les vecteurs demandés se calculent grâce aux matrices précédentes. En effet, comme $\vec{u}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, calculer $f(\vec{u})$, $(f+g)(\vec{u})$, $(f_og)(\vec{u})$, $(f_of)(\vec{u})$, $f^{-1}(\vec{u})$ revient à calculer respectivement $A\vec{u}$, $(A+B)\vec{u}$, $AB\vec{u}$, $A^2\vec{u}$ et enfin $A^{-1}\vec{u}$.
   - $A\vec{u}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$,
   - $(A+B)\vec{u}=\begin{pmatrix}2&4&5\\1&2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\4\\1\end{pmatrix}$,
   - $AB\vec{u}=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-1&3&1\\-1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\6\end{pmatrix}$,
   - $A^2\vec{u}=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\25\\25\end{pmatrix}$,
   - $A^{-1}\vec{u}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

5. Comme $\vec{u}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, on a $f(\vec{u})=-\vec{u}\Leftrightarrow A\vec{u}=-\vec{u}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x_1+2x_2+2x_3&=&-x_1\\2x_1+x_2+2x_3&=&-x_2\\2x_1+2x_2+x_3&=&-x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2x_1+2x_2+2x_3&=&0\\2x_1+2x_2+2x_3&=&0\\2x_1+2x_2+2x_3&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1\in\mathbb{R}\\x_2\in\mathbb{R}\\x_3=-x_1-x_2\end{array}\right..$$

   Conclusion, les vecteurs $\vec{u}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ tels que $f(\vec{u})=-\vec{u}$ vérifient

$$\vec{u}=(x_1,x_2,-x_1-x_2)=x_1(1,0,-1)+x_2(0,1,-1),\ x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

   Tous les vecteurs qui s'écrivent de la sorte sont donc des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda=-1$.

6. Soient les vecteurs $\vec{v_1}=(1,1,1)$, $\vec{v_2}=(1,-1,0)$, $\vec{v_3}=(1,0,-1)$.
   (a) Comme $\dim(\mathcal{B}')=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}'=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $|\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3|\neq 0$. On a $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=3\neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ s'obtient en exprimant en colonnes les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}$: $P=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}\vec{v_1}&\vec{v_2}&\vec{v_3}\end{array}&\\\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\vec{e_1}\\\vec{e_2}\\\vec{e_3}\end{array}\end{array}$. Cette matrice est inversible car c'est une matrice de passage (on a démontré précédemment que les 3 vecteurs colonnes qui la composent étaient linéairement indépendants et formaient une base).

   (c) Inversons P (cela revient en fait à exprimer cette fois-ci $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ en fonction de $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$). On trouve à l'aide de la méthode des cofacteurs, $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

   (d) • Déterminons tout d'abord $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il suffit pour cela de calculer $A\vec{v_1}, A\vec{v_2}, A\vec{v_3}$ ou même AP. En effet,

$$
\begin{aligned}
AP &= A[\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}] = [A\vec{v_1}\ A\vec{v_2}\ A\vec{v_3}] = [f(\vec{v_1})\ f(\vec{v_2})\ f(\vec{v_3})] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{v_1}) & f(\vec{v_2}) & f(\vec{v_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \end{array}.
\end{aligned}
$$

- Afin de déterminer $f(\vec{v_1})$, $f(\vec{v_2})$, $f(\vec{v_3})$ dans la base $\mathcal{B}'$, il suffit de multiplier la matrice précédente à gauche par l'inverse de P. On obtient ainsi

$$
\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{v_1}) & f(\vec{v_2}) & f(\vec{v_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{array} \end{array}.
$$

Nous avons en fait diagonalisé la matrice A à l'aide de la base $\mathcal{B}'$ et ainsi noté que $D = P^{-1}AP$.

(e) La matrice D de l'application linéaire f, rapportée à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cela permet d'affirmer entre-autre que 5 est une valeur propre simple de A tandis que -1 est une valeur propre double.

Exercice 13

1. (a) Comme $\dim(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ce qui est le cas puisque le déterminant vaut -3.

(b) On a facilement $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \end{array}$.

(c)
$$
\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& y_1 \\ x_2 + 2x_3 &=& y_2 \\ x_1 + x_2 &=& y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 &=& y_1 - x_1 \\ x_2 + 2x_3 &=& y_2 \\ x_2 &=& y_3 - x_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (y_3 - x_1) + 2(y_1 - x_1) &=& y_2 \\ x_2 &=& y_3 - x_1 \\ x_3 &=& y_1 - x_1 \end{array} \right.
$$
$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + y_3) \\ x_2 &=& \frac{1}{3}(-2y_1 + y_2 + 2y_3) \\ x_3 &=& \frac{1}{3}(y_1 + y_2 - y_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.
$$

(d) On déduit évidemment de la question précédente, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) La matrice A de f rapportée à la base $\mathcal{B}$ est donnée par $A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \end{array}$.

A étant une matrice diagonale, on obtient facilement $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

(b) $M = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) D'après le cours (et les exercices précédents),

$$
\begin{aligned}
M^n = P^{-1}A^nP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2^n & 3^n \\ -2 & 2^n & 2.3^n \\ 1 & 2^n & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + 3^n & -2^n + 3^n & 2 - 2^{n+1} \\ -2 + 2.3^n & 2^n + 2.3^n & -2 + 2^{n+1} \\ 1 - 3^n & 2^n - 3^n & 1 + 2^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice 14

1. $\left\{\begin{array}{rcll} 2x_1+2x_2+x_3+9x_4 &=& 0 & (L_1)\\ -x_1-x_2-x_3-6x_4 &=& 0 & (L_2)\leftarrow 2(L_2)+(L_1)\\ x_1+2x_2+2x_3+11x_4 &=& 0 & (L_3)\leftarrow 2(L_3)-(L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1+2x_2+x_3+9x_4 &=& 0 & (L_1)\\ -x_3-3x_4 &=& 0 & (L_2)\leftarrow (L_3)\\ 2x_2+3x_3+13x_4 &=& 0 & (L_3)\leftarrow (L_2)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+2x_2+x_3+9x_4 &=& 0\\ 2x_2+3x_3+13x_4 &=& 0\\ -x_3-3x_4 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -x_4\\ x_2 &=& -2x_4\\ x_3 &=& -3x_4\\ x_4\in\mathbb{R} && \end{array}\right..$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,-2x_4,-3x_4,x_4)=-x_4(1,2,3,-1),\ x_4\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

2. (a) On remarque que le système précédent peut s'écrire

$$x_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}9\\-6\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+x_3\vec{v_3}+x_4\vec{v_4}=\vec{0}.$$

Cette dernière égalité est la définition même d'une dépendance linéaire entre les vecteurs $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ pourvu qu'elle n'implique pas exclusivement $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)$. C'est bien le cas puisqu'on a trouvé une infinité de solutions non nulles. Par conséquent, les vecteurs $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont linéairement dépendants.

Considérons le quadruplet $(1,2,3,-1)$, solution du système obtenue en posant $x_4=1$ dans (1). Ainsi, une relation de dépendance entre les 4 vecteurs peut être donnée par

$$\vec{v_1}+2\vec{v_2}+3\vec{v_3}-\vec{v_4}=\vec{0}.$$

(b) Comme $\dim(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, il nous suffit de montrer que les 3 vecteurs sont linéairement indépendants pour prouver qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$. On a $\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=1\neq 0$ donc $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) La matrice de f rapportée à la base naturelle est donnée par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1})=\vec{v_1} & f(\vec{e_2})=\vec{v_2} & f(\vec{e_3})=\vec{v_3}\end{array} \\ M= & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{array}.\end{array}$$

(b) $f(\vec{w})=M\vec{w}=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=1\vec{w}$, ce qui prouve que 1 est une valeur propre de M et $\vec{w}$ est le vecteur propre associé.

4. (a) On l'aura vite remarqué, les colonnes de A sont les vecteurs $\vec{v_1},\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$. Comme ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, ils sont linéairement indépendants et donc $\det(A)\neq 0$. A est une matrice inversible.

(b) $A^2=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&2\\-2&-3&-2\\2&4&3\end{pmatrix}$ et on remarque rapidement que

$$A^2=\begin{pmatrix}2\times2-1 & 2\times2-0 & 2\times1-0\\ 2\times(-1)-0 & 2\times(-1)-1 & 2\times(-1)-0\\ 2\times1-0 & 2\times2-0 & 2\times2-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2A-I.$$

(c) $A^2=2A-I\Leftrightarrow 2A-A^2=I\Leftrightarrow A(2I-A)=I$, ce qui permet de prouver à nouveau que A est inversible et que l'inverse de A est donné par $A^{-1}=2I-A=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\1&3&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$.

(d) $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-6\\11\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}9\\-6\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\1&3&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-6\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On aurait pu déduire ce résultat de la réponse donnée en 2.(a). En effet, on avait démontré que

$$\vec{v_1}+2\vec{v_2}+3\vec{v_3}-\vec{v_4}=\vec{0}\Leftrightarrow 1\vec{v_1}+2\vec{v_2}+3\vec{v_3}=\vec{v_4}\Leftrightarrow(\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\vec{v_4}\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-6\\11\end{pmatrix}.$$

Exercice 15

1. (a) $\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ donc M n'est pas inversible, c'est une matrice singulière.

   (b) • $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   • $M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$.

   (c) $M^5 = M^2 \times M^3 = M^2 \times M = M^3 = M$.

   (d) $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda^3 + 2 - 2) - (-2\lambda - \lambda + 2\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = \lambda(-\lambda^2 + 1) =$ $\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$. Les valeurs qui annulent le déterminant sont donc 0 (ce qu'on savait déjà d'après la question 1.(a)), 1 et -1.

2. (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & 0 \\ y & = & -x - z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2(-x-z) + 2z & = & 0 \\ y & = & -x - z \end{array} \right.$

   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 4z & = & 0 \\ y & = & -x - z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{3}z \\ y & = & -(-\frac{4}{3}z) - z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{3}z \\ y & = & \frac{1}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

   Le système admet donc une infinité de solutions de la forme

   $$(x, y, z) = (-\tfrac{4}{3}z, \tfrac{1}{3}z, z) = \tfrac{1}{3}z(-4, 1, 3), \ z \in \mathbb{R}.$$

   Posons $X = (x, y, z)$. Le système précédent s'écrit

   $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   $$\Leftrightarrow (M + I)X = 0 \Leftrightarrow MX = (-1)X.$$

   Cette dernière égalité prouve que "-1" vérifie l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$, ce qui a été établi à la question 1.(d).

   (b) On obtient les images par f de $\vec{\epsilon_1}$, $\vec{\epsilon_2}$ et $\vec{\epsilon_3}$ en multipliant respectivement M par $\vec{\epsilon_1}$, $\vec{\epsilon_2}$ et $\vec{\epsilon_3}$. On a

   • $M\vec{\epsilon_1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\vec{\epsilon_1}$,

   • $M\vec{\epsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.\vec{\epsilon_2}$,

   • $M\vec{\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1).\vec{\epsilon_3}$.

3. (a) Soit $\mathcal{B} = (\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}, \vec{\epsilon_3})$. Comme $\dim(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, de tester l'indépendance linéaire des 3 vecteurs qui constituent $\mathcal{B}$. Comme $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) On obtient facilement $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{\epsilon_1} & \vec{\epsilon_2} & \vec{\epsilon_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$.

   À l'aide de la méthode des cofacteurs, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (c) $B = P^{-1}MP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{\epsilon_1}) & f(\vec{\epsilon_2}) & f(\vec{\epsilon_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{\epsilon_1} \\ \vec{\epsilon_2} \\ \vec{\epsilon_3} \end{array}$.

(d) $M^5 = PB^5P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

1. (a) Comme $|\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Pour constituer une base de $\mathbb{R}^3$, il faut au moins 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ce qui n'est pas le cas de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

   (c) $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$ et donc P est inversible.

   (d) On obtient $P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I \Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. (a) • $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   • $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   • $f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $\det(B) = 2 \times 1 \times (-1) = -2 \neq 0$.

3. (a) $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(B)\det(B)\det(P^{-1}) \neq 0$ donc A est inversible.

4. (a) On a $(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x - y + z & = & a & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ z & = & b & (L_2) \leftarrow (L_3) - (L_2) \\ x + y + z & = & c & (L_3) \leftarrow (L_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x - y & = & a - b & (L_1) \leftarrow \frac{1}{2}((L_1) + (L_2)) \\ x + y & = & c - b & (L_2) \leftarrow \frac{1}{2}(((L_2) - (L_1)) \\ z & = & b & (L_3) \end{array} \right.$

   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c \\ y & = & -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ z & = & b \end{array} \right.$

   (b) Si M est la matrice du système (S), inverser M revient à inverser ce système ce qu'on a fait dans la question précédente. On obtient donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

1. (a) • $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

   • $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

   (b) • On a $\det(A) = 2$.

   • On développe le déterminant de C selon la première colonne (voir chapitre suivant).

$$\det(C) = 6 \times (-1)^{1+1} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 \times \det(A) = 12.$$

(c) On trouve $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&1\\-3&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ en résolvant le système $AX=B$ où $X=(x,y,z)$ et $B=(a,b,c)$ sont deux vecteurs inconnus.

2. (a) La matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est donnée par $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&3\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{array}\end{array}$ qui est en fait A.

(b) Calculer l'image de $\vec{u}$ par f revient à calculer $A\vec{u}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

3. (a) La matrice formée des 3 vecteurs $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$ étant donnée par $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&3\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{array}\end{array}$ c'est-à-dire A (toujours), les 3 vecteurs $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(A)\neq 0$ (car $\dim(\vec{I},\vec{J},\vec{K})=\dim(\mathbb{R}^3)=3$), ce qui est bien le cas car $\det(A)=2$.

(b) A est la matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

(c) Les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données par $A\vec{v}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\10\\30\end{pmatrix}$.

(d) Les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ sont $A^{-1}\vec{w}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&1\\-3&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 18

1. (a) • $A^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix}$,

• $A\times B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

(b) On remarque à l'aide du calcul précédent que $AB=-4I$.

(c) $AB=-4I\Leftrightarrow A(-\frac{1}{4}B)=I$, ce qui signifie que A est inversible et que $A^{-1}=-\frac{1}{4}B=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}$.

2. $$\left\{\begin{array}{rcl}x+y+2z&=&9\\x+2y+z&=&7\\2x+y+z&=&8\end{array}\right.\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\\8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underbrace{-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}9\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

3. (a) Comme $\dim(\mathcal{B}')=\dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})\neq 0$. Comme $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=6\neq 0$, la famille $\mathcal{B}'=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Par définition, $P=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{e_1}\\\vec{e_2}\\\vec{e_3}\end{array}\end{array}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(c) On calcule simplement $P\vec{t}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+4\vec{e_3}$.

4. (a) On obtient aisément $A=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{e_1}\\\vec{e_2}\\\vec{e_3}\end{array}\end{array}$.

(b) Les images de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par f sont obtenues en calculant respectivement $A\vec{u}$, $A\vec{v}$ et $A\vec{w}$.

- $A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$,
- $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19

1. (a) On rappelle que la trace d'un matrice (carrée) est égale à la somme des ses éléments diagonaux principaux. Par conséquent, $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 + 3 = 6$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 6A.$

(c) On note aisément que A n'est pas inversible car elles contient des lignes (ou des colonnes) redondantes.

(d) i. $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$.

ii. $AX = 6X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ x+2y+3z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 6x \\ x+2y+3z & = & 6y \\ x+2y+3z & = & 6z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -5x+2y+3z & = & 0 \\ x-4y+3z & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -5x+2y+3z & = & 0 \\ -18y+18z & = & 0 \\ 12y-12z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -5x+2y+3z & = & 0 \\ y & = & z \\ & & z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$.

Par conséquent, le système linéaire $AX = 6X$ admet une infinité de solutions de la forme $(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$, $z \in \mathbb{R}$.

2. (a) L'image de $\vec{k}$ par f s'obtient en calculant $A\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) On a

- $f(\vec{e_1}) = A\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{e_1}$,
- $f(\vec{e_2}) = A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{e_2}$,
- $f(\vec{e_3}) = A\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\vec{e_3}$.

3. (a) Comme $\dim(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et que $\det(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice de passage de à est donnée par $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$.

(c) On a

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$