CORRECTION Exercices Diagonalisation - Chapitre 2

Exercice 20

1. Les diverses informations peuvent être traduites sous la forme du système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 0,1x+0,1y+z &=& 435,6 & (L_1)\leftarrow 10(L_1)\\ 0,2x+y+0,1z &=& 422,4 & (L_2)\leftarrow 10(L_2)\\ x+0,1y+0,2z &=& 421,3 & (L_3)\leftarrow 10(L_3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+10z &=& 4356\\ 2x+10y+z &=& 4224\\ 10x+y+2z &=& 4213\end{array}\right.$$

2. On peut résoudre ce système avec la méthode du pivot de Gauss. On peut également utiliser les formules de Cramer. On pose $A=\begin{pmatrix}1&1&10\\2&10&1\\10&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4356\\4224\\4213\end{pmatrix}$ et ainsi, $(S)\Leftrightarrow AX=B$. Montrons que A est inversible ; comme

$\det(A)=[(1\times10\times2)+(2\times1\times10)+(10\times1\times1)]-[(10\times10\times10)+(1\times1\times1)+(2\times1\times2)]=-955\neq0$

le système (S) est inversible et admet comme unique solution $X=(x,y,z)$ avec

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4356&1&10\\4224&10&1\\4213&1&2\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-300531}{-955}\simeq 314,69,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&4356&10\\2&4224&1\\10&4213&2\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-307769}{-955}\simeq 322,27,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&4356\\2&10&4224\\10&1&4213\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-355168}{-955}\simeq 371,90$$

ceci d'après les formules de Cramer.

Exercice 21 Vérifions dans un premier temps que A est inversible : c'est le cas car $\det(A)=-3\neq0$ donc A^{-1} existe.

- 1ère méthode : définition de l'inverse. On cherche $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
La 2ème égalité équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl}2a+c&=&1\\2b+d&=&0\\a-c&=&0\\b-d&=&1\end{array}\right.$. On obtient aisément $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{3},d=-\frac{2}{3}$, ce qui permet d'affirmer que $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$.
- 2ème méthode : utilisation de la méthode de Gauss. On résout le système
$$\left\{\begin{array}{rcll}2x+y&=&a&(L_1)\\x-y&=&b&(L_2)\leftarrow 2(L_2)-(L_1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}2x+y&=&a&(L_1)\leftarrow 3(L_1)+(L_2)\\-3y&=&2b-a&(L_2)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}6x&=&2a+2b&(L_1)\leftarrow\frac{1}{6}(L_1)\\-3y&=&2b-a&(L_2)\leftarrow-\frac{1}{3}(L_2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b\\y&=&\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$
- 3ème méthode : utilisation de la méthode des cofacteurs. On a $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T$. Comme $\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, on obtient aisément $(\mathrm{Com}(A))^T=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ (on aura remarqué que comme A est symétrique, sa comatrice l'est également). Finalement, en appliquant notre formule, on retrouve bien A^{-1}.

Exercice 22

- $\det(A)=1\neq0$ donc A est inversible et on trouve $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&5\end{pmatrix}$.
- $\det(B)=2\neq0$ (la matrice étant triangulaire, son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux principaux) donc B est inversible. On trouve alors $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$.

- $\det(C) = -1 \neq 0$ donc C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ (on dit que C est une matrice involutive car $C^{-1} = C$).

Exercice 23

- $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6)$
- $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$
- $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 5 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 4)$

Exercice 24

1. Comme $(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B}$, on en déduit aisément la matrice A du système (S).
2. Comme $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$, la matrice A est inversible et A^{-1} est bien défini. Par conséquent, la solution de (S) est unique et est définie par $X = A^{-1}B$.
3. On utilise la formule : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A))^T$. On obtient aisément $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
4. On déduit de ce qui précède la solution demandée : $X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 25

1. (a) $\det(D_1) = -20$,
   (b) $\det(D_2) = -28$,
   (c) $\det(D_3) = -3$,
   (d) $\det(D_4) = 0$.
2. $\det(D_5) = (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 64 - 84 = 44.$

Exercice 26

1. Le système admet un déterminant différent de 0 (il vaut 140), il admet donc une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix}} = -\frac{13}{5}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}.$$

2. Le déterminant du système est nul, ce dernier admet donc une infinité de solutions.

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x - 3y + z & = & 0 & (L_1) \\ x + 2y + 4z & = & 0 & (L_2) \leftarrow 2(L_2) - (L_1) \\ 5x - 4y + 6z & = & 0 & (L_3) \leftarrow 2(L_3) - 5(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ 7y + 7z & = & 0 \\ 7y + 7z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

   Les solutions du système sont données par $(-2z, -z, z) = z(-2, -1, 1)$, $z \in \mathbb{R}$.
3. Le système admet un déterminant différent de 0 (il vaut -34), il admet donc une unique solution qui est la solution nulle (et on n'a pas besoin des formules de Cramer pour l'affirmer).