CORRECTION Exercices Diagonalisation - Chapitre 3

Exercice 27 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & a \\ b & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - ab = \lambda^2 - 18\lambda + (81 - ab)$. Le discriminant de ce trinôme du second degré est égal à $\Delta = (-18)^2 - 4(1)(81 - ab) = 4ab$.

– Supposons que a, b soient non nuls et de même signe alors $\Delta > 0$ et le trinôme, c'est-à-dire le polynôme caractéristique de C, admet deux racines distinctes qui sont $\lambda_1 = \frac{-(-18)-\sqrt{4ab}}{2} = 9 - \sqrt{ab}$ et $\lambda_2 = 9 + \sqrt{ab}$. Dans ce cas, la matrice C est diagonalisable.

– Supposons que a, b soient non nuls et de signes distincts alors $\Delta < 0$ et le polynôme caractéristique n'admet pas de racine (dans $\mathbb{R}$). Dans ce cas, C n'est pas diagonalisable (dans $\mathbb{R}$).

– Supposons que a ou b s'annule alors $\Delta = 0$ et le polynôme caractéristique admet une racine double $\lambda = \frac{18}{2} = 9$. Supposons que $a = 0$ et $b \neq 0$. Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

$$(C - 9I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9-9 & 0 \\ b & 9-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ bx & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X = (0, y) = y(0, 1)$, $y \in \mathbb{R}$. Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre double $\lambda = 9$ est de dimension égale à $1 \neq 2$, la matrice C n'est pas diagonalisable. Le cas $a \neq 0$ et $b = 0$ donne lieu à la même conclusion.

Exercice 28 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -36 & 28 \\ 6 & 23-\lambda & -14 \\ 4 & 14 & -9-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10-2\lambda & 0 \\ 6 & 23-\lambda & -14 \\ 4 & 14 & -9-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 11-\lambda & -14 \\ 4 & 6 & -9-\lambda \end{vmatrix}$

$= (5-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 11-\lambda & -14 \\ 6 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(11-\lambda) \times (-9-\lambda) + 14 \times 6] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15)$

$= (5-\lambda)(5-\lambda)(3+\lambda)$.

Étant donné que A admet 1 valeur propre double (de multiplicité algébrique $\alpha = 2$), on ne peut pas conclure immédiatement. Il faut déterminer la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda = 5$ soit $E_5 = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 5X\} = \ker(A - 5I)$. Soit $X = (x, y, z) \in E_5$ alors

$$AX = 5X \Leftrightarrow (A - 5I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & -36 & 28 \\ 6 & 18 & -14 \\ 4 & 14 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -12x - 36y + 28z & = & 0 \\ 6x + 18y - 14z & = & 0 \\ 4x + 14y - 14z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 3x + 9y - 7z & = & 0 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ 2x + 7y - 7z & = & 0 & (L_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ 2x + 7y - 7z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = \frac{3}{7}y \end{array} \right.$$

Par conséquent, le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (-2y, y, \frac{3}{7}y) = y(-2, 1, \frac{3}{7})$, $y \in \mathbb{R}$. On a donc $(\dim(E_5) = 1) \neq (\alpha = 2)$, ce qui implique que A n'est pas diagonalisable.

• $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & -\lambda & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = [\lambda^2(4-\lambda) + 9 + 21] - [7\lambda + 3\lambda + 9(4-\lambda)] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6.$

À l'aide des racines évidentes, on montre facilement que $|B - \lambda I| = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Les 3 valeurs propres étant distinctes, on a bien $\dim E_{\lambda_i} = \dim(\ker(B - \lambda_i I)) = 1 = \alpha_i$ (où λ_i est la i-ème valeur propre et α_i sa multiplicité algébrique), $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, B est diagonalisable. Donnons la (une) matrice de passage associée grâce aux sous-espaces propres de A :

⋆ Soient $E_{-1} = \ker(B - (-1)I) = \ker(B + I) = \{X \in \mathbb{R}^3, BX = -X\}$ et $X = (x, y, z) \in E_{-1}$. On a

$$BX = -X \Leftrightarrow (B - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 1 & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x - \frac{3}{2}y - z & = & 0 & (L_1) \\ -6x + y - 2z & = & 0 & (L_2) \leftarrow (L_2) + 6(L_1) \\ 7x + \frac{3}{2}y + 5z & = & 0 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 7(L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - \frac{3}{2}y - z & = & 0 \\ -8y - 8z & = & 0 \\ 12y + 12z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Par conséquent, $X \in E_{-1} \Leftrightarrow X = (-\frac{1}{2}z, -z, z) = -\frac{1}{2}z(1, 2, -2)$, $z \in \mathbb{R}$. On peut prendre $z = -2$.

⋆ Soient $E_2 = \ker(B - 2I) = \{X \in \mathbb{R}^3, BX = 2X\}$ et $X = (x, y, z) \in E_2$. On a

$$BX = 2X \Leftrightarrow (B - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & -2 & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -2x-\frac{3}{2}y-z &=& 0 & (L_1)\\ -6x-2y-2z &=& 0 & (L_2)\leftarrow(L_2)-3(L_1)\\ 7x+\frac{3}{2}y+2z &=& 0 & (L_3)\leftarrow 2(L_3)+7(L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x-\frac{3}{2}y-z &=& 0\\ \frac{5}{2}y+z &=& 0\\ -\frac{15}{2}y-3z &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{5}z\\ y &=& -\frac{2}{5}z\\ z\in\mathbb{R} && \end{array}\right. .$$

Par conséquent, $X\in E_2 \Leftrightarrow X=(-\frac{1}{5}z,-\frac{2}{5}z,z)=-\frac{1}{5}z(1,2,-5)$, $z\in\mathbb{R}$. On peut prendre $z=-5$.

⋆ Soient $E_3=\ker(B-3I)=\{X\in\mathbb{R}^3, BX=3X\}$ et $X=(x,y,z)\in E_3$. On a

$$BX=3X\Leftrightarrow (B-3I)X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & -\frac{3}{2} & -1\\ -6 & -3 & -2\\ 7 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -3x-\frac{3}{2}y-z &=& 0 & (L_1)\\ -6x-3y-2z &=& 0 & (L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1)\\ 7x+\frac{3}{2}y+z &=& 0 & (L_3)\leftarrow 3(L_3)+7(L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x-\frac{3}{2}y-z &=& 0\\ 0 &=& 0\\ -6y-4z &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -\frac{2}{3}z\\ z\in\mathbb{R} && \end{array}\right.$$

Par conséquent, $X\in E_3 \Leftrightarrow X=(0,-\frac{2}{3}z,z)=-\frac{1}{3}z(0,2,-3)$, $z\in\mathbb{R}$. On peut prendre $z=-3$.

On déduit alors de cette étude une matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -5 & -3\end{pmatrix}$ qui vérifie la relation

$$D=P^{-1}AP\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -2\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2} & -1\\ -6 & 0 & -2\\ 7 & \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -5 & -3\end{pmatrix}.$$

Exercice 29 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & a & b & c\\ 0 & 1-\lambda & d & e\\ 0 & 0 & 2-\lambda & f\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$. On déduit donc du polynôme caractéristique que $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$ sont deux valeurs propres doubles (de multiplicités algébriques respectives $\alpha_1=2$ et $\alpha_2=2$). Il faut déterminer la dimension des sous-espaces propres respectifs pour statuer sur le caractère diagonalisable de A.

- Soient $E_1=\ker(B-I)=\{X\in\mathbb{R}^3, BX=X\}$ et $X=(x,y,z)\in E_1$. On a

$$BX=X\Leftrightarrow (B-I)X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ay+bz+ct &=& 0\\ dz+et &=& 0\\ z+ft &=& 0\\ t &=& 0\end{array}\right. .$$

  Les deux dernières équations nous permettent d'affirmer que $z=t=0$. La 2ème ne nous donne rien. On distingue ensuite deux cas :

  ⋆ Si $a\neq 0$, la 1ère équation nous donne $y=0$. Dans ce cas, les solutions du système sont données par $X=(x,0,0,0)=x(1,0,0,0)$, $x\in\mathbb{R}$. Comme $(\dim(E_1)=1)\neq(\alpha_1=2)$, on en déduit que A n'est pas diagonalisable. Il n'est pas nécessaire d'étudier E_2.

  ⋆ Si $a=0$, la 1ère équation nous donne $0=0$. Dans ce cas, les solutions du système sont données par $X=(x,y,0,0)=x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0)$, $x,y\in\mathbb{R}$. On a cette fois-ci $\dim(E_1)=2=\alpha_1$.

- Étudions maintenant E_2 : $E_2=\ker(B-2I)=\{X\in\mathbb{R}^3, BX=2X\}$. Soit $X=(x,y,z)\in E_2$ alors

$$BX=2X\Leftrightarrow (B-2I)X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & a & b & c\\ 0 & -1 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+ay+bz+ct &=& 0\\ -y+dz+et &=& 0\\ ft &=& 0\\ 0 &=& 0\end{array}\right. .$$

  On distingue deux cas :

  ⋆ Si $f\neq 0$, La 3ème équation donne $t=0$, les 2ème et 1ère nous donnent respectivement $y=dz$ et $x=ay+bz=(ad+b)z$. Par conséquent, les solutions du système sont données par $X=((ad+b)z,dz,0,z)=z(ad+b,d,0,1)$ et $(\dim(E_2)=1)\neq(\alpha_2=1)$. Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

  ⋆ Si $f=0$, la 3ème équation donne $0=0$, la 2ème donne $y=dz+et$ et la 1ère nous fournit $x=ay+bz+ct=a(dz+et)+bz+ct=(ad+b)z+(ae+c)t$. Finalement les solutions du système sont données par $X=((ad+b)z+(ae+c)t,dz+et,z,t)=((ad+b)z,dz,z,0)+((ae+c)t,et,0,t)=z(ad+b,d,1,0)+t(ae+c,e,0,1)$. Comme $\dim(E_2)=2=\alpha_2$, A est diagonalisable.

Conclusion, A est diagonalisable uniquement dans le cas où $(a,f)=(0,0)$.

Exercice 30

1. Déterminons les valeurs propres de M. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$|M-\lambda I|=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 2 & -1\\ 3 & -2-\lambda & 0\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2+C_1}{=}\begin{vmatrix}-\lambda & 2-\lambda & -1\\ 3 & 1-\lambda & 0\\ -2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2-2(1-\lambda)-3(2-\lambda)(1-\lambda)=0\Leftrightarrow (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2-3(2-\lambda)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)[\lambda^2+2\lambda-8]=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)=0$$

On déduit de ces équivalences les valeurs propres de A qui sont 1,2 et -4. Ces trois valeurs propres étant

distinctes, A est diagonalisable.
Déterminons les sous-espaces propres $E_1 = \ker(A - I)$, $E_2 = \ker(A - 2I)$ et $E_{-4} = \ker(A + 4I)$.

- Soient $E_1 = \ker(A - I) = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = X\}$ et $X \in E_1$. On a
$$AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 3y \end{cases}.$$
Donc le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (-y, y, 3y) = y(-1, 1, 3)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = 1$.
- Soient $E_2 = \ker(A - 2I) = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = 2X\}$ et $X \in E_2$. On a
$$AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z &= 0 \\ 3x - 4y &= 0 \\ -2x + 2y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}.$$
Donc le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (\frac{4}{3}y, y, -\frac{2}{3}y) = \frac{1}{3}y(4, 3, -2)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = 3$.
- Soient $E_{-4} = \ker(A + 4I) = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = -4X\}$ et $X \in E_{-4}$. On a
$$AX = -4X \Leftrightarrow (A + 4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \\ -2x + 2y + 5z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}.$$
Donc le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (-\frac{2}{3}y, y, -\frac{2}{3}y) = -\frac{2}{3}y(1, -3, 1)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = -\frac{3}{2}$.

Une matrice de passage P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale est donnée par $P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminons le polynôme caractéristique de N. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$|N - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -2-\lambda & 0 & -\lambda+2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 6-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda + 2) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda + 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (-\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$
Déterminons ensuite la dimension du sous-espace propre $E_2 = \ker(N - 2I)$. Soit $X = (x, y, z) \in E_2$ alors
$$(N - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 2z &= 0 \\ 4y - 3z &= 0 \\ -x + 4y - 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x = z\frac{3}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$
Par conséquent le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (z, \frac{3}{4}z, z) = \frac{1}{4}z(4, 3, 4)$, $z \in \mathbb{R}$. Comme $(\dim(E_2) = 1) \neq (\alpha_2 = 2)$, on en déduit que N n'est pas diagonalisable.

Exercice 31

1. Montrons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AC_1 = \lambda C_1$. Multiplions $P^{-1}AP$ à droite par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a
$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AC_1 = C_1.$$
C_1 est donc bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. Multiplions $P^{-1}AP$ à droite par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a
$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AC_2 = C_1 + C_2.$$
3. Déterminons les valeurs propres de A. On a $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ donc $\lambda = 1$ est une valeur propre double. On s'intéresse ensuite à $E_1 = \ker(A - I) = \{X \in \mathbb{R}^2 / AX = X\}$. Soit $X = (x, y) \in E_1$. On a
$$AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y &= 0 \\ 4x + 2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2x \end{cases}$$
Les solutions du système sont données par $X = (x, -2x) = x(1, -2)$, $x \in \mathbb{R}$.
On cherche ensuite un vecteur propre généralisé $Y = (x, y)$ de A associé à $\lambda = 1$, solution de
$$(A - I)Y = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y &= 1 \\ 4x + 2y &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $Y = (-1-2x, x) = (-1, 0) + (-2x, x) = (-1, 0) + x(-2, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra choisir par exemple $x = 0$ et dans ce cas $Y = (-1, 0)$.
Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et bien-sûr, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 32}}$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique associé à A est défini par

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 3 \\ -8 & 7-\lambda & 4 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 3 \\ 0 & 7-\lambda & 4 \\ -2\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 3 \\ 0 & 7-\lambda & 4 \\ 0 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1).$$

La matrice A admet donc pour valeurs propres 0 (vp simple) et 1 (vp double). On ne peut donc affirmer à ce niveau que A est diagonalisable.

2. Si A n'est pas diagonalisable, c'est à cause du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. On a par définition $E_1 = \ker(A - I) = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = X\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_1$, on a alors

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ -8 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -7x + 5y + 3z & = & 0 \\ -8x + 6y + 4z & = & 0 \\ -2x + y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x \\ z = -x \end{array} \right. .$$

Les solutions du système sont données par $X = (x, 2x, -x) = x(1, 2, -1)$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $(\dim(E_1) = 1) \neq (\alpha_1 = 2)$, A n'est pas diagonalisable.
Soient $X = (1, 2, -1)$ obtenu en posant $x = 1$ dans le résultat précédent et $Y = (x, y, z)$. Cherchons un vecteur propre généralisé de A associé à la valeur propre 1 en résolvant $(A - I)Y = X$. On a

$$(A - I)Y = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -7x + 5y + 3z & = & 1 \\ -8x + 6y + 4z & = & 2 \\ -2x + y & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = -1 + 2x \\ z = 2 - x \end{array} \right. .$$

Les solutions du système précédent sont données par $Y = (x, -1+2x, 2-x) = (0, -1, 2) + x(1, 2, -1)$, $x \in \mathbb{R}$. On peut choisir $x = 0$ par exemple et donc $Y = (0, -1, 2)$.
Déterminons le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0. On a par définition $E_0 = \ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 0\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_0$, on a alors

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -6x + 5y + 3z & = & 0 & (L_1) \\ -8x + 7y + 4z & = & 0 & (L_2) \leftarrow 6(L_2) - 8(L_1) \\ -2x + y + z & = & 0 & (L_3) \leftarrow 3(L_3) - (L_1) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + 5y + 3z & = & 0 \\ 2y & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 2x \end{array} \right. .$$

Les solutions du système sont données par $X = (x, 0, 2x) = x(1, 0, 2)$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $x = 1$.

3. Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la théorie nous permet d'affirmer que $A = PTP^{-1}$.

Si on décompose T sous la forme $T = T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$A = P(T_1 + T_2)P^{-1} = PT_1P^{-1} + PT_2P^{-1} = \Delta + N$$

où Δ est diagonalisable, N est nilpotente et ces deux matrices vérifient $\Delta.N = N.\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$.

$\boxed{\textbf{Exercice 33}}$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. Les valeurs propres de A sont donc 2 et -1.

2. $|B - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc B n'admet pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$. Si on travaille dans $\mathbb{C}$, la matrice B admet deux valeurs propres qui sont $1 + i$ et $1 - i$.

3. $|C-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 14 = 0$. Comme $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(14) = 8$, les valeurs propres de C sont $\lambda_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{8}}{2} = 4 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.
4. $|D-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = 0$
$\Leftrightarrow (2-\lambda)[(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)] = (2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$. Les valeurs propres de D sont donc 2 (vp double) et 4 (vp simple).
5. $|E-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2-2\lambda \\ 1 & \lambda-4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$
$= (-2-2\lambda)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (2+\lambda)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18)$. On a $\Delta = (9)^2 - 4(-1)(-18) = 9 > 0$ donc le second facteur admet deux racines qui sont 3 et 6. Par conséquent, E admet 3 valeurs propres distinctes qui sont $-2, 3$ et 6.

Exercice 34

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. On a $\Delta = (-7)^2 - 4(10) = 9 > 0$ donc le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes 2 et 5. A admet donc deux valeurs propres 2 et 5.
2. (a) $AX = 5X \Leftrightarrow (A-5I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x \end{array} \right.$.
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(x, 2x) = x(1,2)$, $x \in \mathbb{R}$. On peut choisir $x = 1$ et on retrouve X_1.
   (b) $AX = 2X \Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{array} \right.$.
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(x, -x) = x(1,-1)$, $x \in \mathbb{R}$. On peut choisir $x = 1$ et on retrouve X_2.
3. (a) $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc P est inversible. On a $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}(\mathrm{Com}(P))^T = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $P^{-1}AP = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 2.5^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n + 2^n \\ 2.5^n + 2^{n+1} & 2.5^n + 2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 35

1. • $AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.X_1$,
   • $AX_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.X_2$,
   • $AX_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.X_3$.

   On déduit des 3 calculs précédents que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$ sont les valeurs propres de A.
2. Les 3 valeurs propres étant distinctes, on a bien $\dim(E_{\lambda_i}) = 1 = \alpha_i$ (E_{λ_i} est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i et α_i est la multiplicité algébrique de λ_i), $\forall i = 1, 2, 3$. A est donc diagonalisable.
3. 0 n'étant pas une valeur propre de A, A est bien inversible.

Exercice 36

1. La matrice A étant triangulaire (supérieure), les valeurs propres de A coïncident avec les éléments de la diagonale principale de A donc $Sp(A) = \{1, 2, 3\}$ où $Sp(A)$ désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A.

2. Avec les arguments précédents, on a $Sp(B) = \{1, 0, 2\}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1)$
$= (3-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)$. On a alors $Sp(C) = \{0, 2, 3\}$.

Exercice 37

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) =$
$(5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$. Le polynôme caractéristique admet donc 3 racines qui sont $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, d'où le spectre de A. La matrice A est diagonalisable car les 3 valeurs propres de A sont distinctes.

2. (a) $AX = -X \Leftrightarrow (A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x - 6y & = & 0 \\ 3x + 6y & = & 0 \\ 3x + 6y + 6z & = & 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array} \right.$. Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-2y, y, 0) = y(-2, 1, 0)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = 1$.

(b) $AX = 2X \Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -6x - 6y & = & 0 \\ 3x + 3y & = & 0 \\ 3x + 6y + 3z & = & 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -y \end{array} \right.$. Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-y, y, -y) = -y(1, -1, 1)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = -1$.

(c) $AX = 5X \Leftrightarrow (A-5I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -9x - 6y & = & 0 \\ 3x & = & 0 \\ 3x + 6y & = & 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$. Le système admet une infinité de solutions de la forme $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $z = 1$.

3. Si on pose $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on aura d'après la théorie $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} & 2^n & 0 \\ (-1)^n & -2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+2} - 2^n & 2(-1)^{n+2} - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}$.

Exercice 38

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] =$
$(2-\lambda)[(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)] = (2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$. Les valeurs propres de A sont donc 2 (de multiplicité algébrique $\alpha_1 = 2$) et 4 (de multiplicité algébrique $\alpha_2 = 1$).

2. • Intéressons nous tout d'abord au sous-espace propre $E_2 = \ker(A - 2I)$. Soit $X = (x, y, z) \in E_2$. On a
$AX = 2X \Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$.
Le système admet une infinité de solutions de la forme $(y - z, y, z) = (y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

- On s'intéresse ensuite au sous-espace propre $E_4 = \ker(A-4I)$. Soit $X=(x,y,z)\in E_4$. On a
$$AX=4X \Leftrightarrow (A-4I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-2&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-x-y+z&=&0\\-2y&=&0\\x-y-z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=z\\y=0\\z\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$
Le système admet une infinité de solutions de la forme $(z,0,z)=z(1,0,1)$, $z\in\mathbb{R}$.

Étant donné que $\dim(E_2)=2=\alpha_1$ et $\dim(E_4)=1=\alpha_2$, A est diagonalisable.

Exercice 39

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)$. La matrice A admet donc pour spectre $Sp(A)=\{1,-2\}$. La matrice A est diagonalisable.
2. - Soient $E_1=\ker(A-I)$ et $X=(x,y)\in E_1$. On a
   $$AX=X\Leftrightarrow (A-I)X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-2x+2y&=&0\\x-y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y\\y\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(y,y)=y(1,1)$, $y\in\mathbb{R}$.
   - Soient $E_{-2}=\ker(A+2I)$ et $X=(x,y)\in E_{-2}$. On a
   $$AX=-2X\Leftrightarrow (A+2I)X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+2y&=&0\\x+2y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2y\\y\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-2y,y)=y(-2,1)$, $y\in\mathbb{R}$.
3. Si on pose $P=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$, la théorie nous permet d'affirmer que $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$.
   On a également $A=PDP^{-1}$ et ainsi
   $$A^n=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&(-2)^{n+1}\\1&(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-(-2)^{n+1}&2+(-2)^{n+1}\\1-(-2)^n&2+(-2)^n\end{pmatrix}.$$
4. Les expressions de U_n et V_n nous permettent d'écrire $\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}$.
5. On a $\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}U_{n-1}\\V_{n-1}\end{pmatrix}=\ldots=A^n\begin{pmatrix}U_0\\V_0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-(-2)^{n+1}&2+(-2)^{n+1}\\1-(-2)^n&2+(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
   Par conséquent, $U_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 40

1. D'après les données, on a le système d'équations linéaires suivant
   $$\left\{\begin{array}{rcl}A_{n+1}&=&0,75B_n\\B_{n+1}&=&0,75A_n+C_n\\C_{n+1}&=&0,25A_n+0,25B_n+0,25C_n\end{array}\right. .$$
   Si on pose $M=\begin{pmatrix}0&0,75&0\\0,75&0&1\\0,25&0,25&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&4\\1&1&0\end{pmatrix}$, la matrice M répond aux exigences de la question.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $|M-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0,75&0\\0,75&-\lambda&1\\0,25&0,25&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\lambda+\frac{9}{16}\lambda=-\lambda^3+\frac{13}{16}\lambda+\frac{3}{16}=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+\frac{3}{16})$
   $\Leftrightarrow |M-\lambda I|=(1-\lambda)(\lambda+\frac{1}{4})(\lambda+\frac{3}{4})$. M admet donc pour valeurs propres 1, $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$.
   Déterminons maintenant les vecteurs propres associés :
   - Soient $E_1=\ker(M-I)$ et $X=(x,y,z)\in E_1$. On a
   $$(M-I)X=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&3&0\\3&-4&4\\1&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-x+\frac{3}{4}y&=&0\\\frac{3}{4}x-y+z&=&0\\\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y-z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{3}{4}y\\y\in\mathbb{R}\\z=\frac{7}{16}y\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{3}{4}y,y,\frac{7}{16}y)=\frac{1}{16}y(12,16,7)$, $y\in\mathbb{R}$. On peut choisir $y=16$ par exemple. Dans ce cas, un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $(12,16,7)$.
   - Soient $E_{-\frac{1}{4}}=\ker(M+\frac{1}{4}I)$ et $X=(x,y,z)\in E_{-\frac{1}{4}}$. On a
   $$(M+\frac{1}{4}I)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&4\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+3y&=&0\\3x+y+4z&=&0\\x+y+z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3y\\y\in\mathbb{R}\\z=2y\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-3y,y,2y)=y(-3,1,2)$, $y\in\mathbb{R}$. On peut choisir $y=1$ par exemple. Dans ce cas, un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{1}{4}$ est $(-3,1,2)$.
   - Soient $E_{-\frac{3}{4}}=\ker(M+\frac{3}{4}I)$ et $X=(x,y,z)\in E_{-\frac{3}{4}}$. On a

$$(M+\tfrac{3}{4}I)=0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&3&0\\3&3&4\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}3x+3y&=&0\\3x+3y+4z&=&0\\x+y+3z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-y\\y\in\mathbb{R}\\z=0\end{array}\right. .$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-y,y,0)=y(-1,1,0)$, $y\in\mathbb{R}$. On peut choisir $y=1$ par exemple. Dans ce cas, un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{3}{4}$ est $(-1,1,0)$.

3. Si on pose $P=\begin{pmatrix}12&-3&-1\\16&1&1\\7&2&0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{3}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$, on a d'après la théorie la relation $M=P^{-1}DP$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, on a alors

$$\begin{aligned}M^n=PD^nP^{-1} &= -\tfrac{1}{70}\begin{pmatrix}12&-3&-1\\16&1&1\\7&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-\frac{1}{4})^n&0\\0&0&(-\frac{3}{4})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\7&7&-28\\25&-45&60\end{pmatrix}\\ &= -\tfrac{1}{70}\begin{pmatrix}12&-3(-\frac{1}{4})^n&-(-\frac{3}{4})^n\\16&(-\frac{1}{4})^n&(-\frac{3}{4})^n\\7&2(-\frac{1}{4})^n&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\7&7&-28\\25&-45&60\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=-\tfrac{1}{70}\begin{pmatrix}-24-21(-\frac{1}{4})^n-25(-\frac{3}{4})^n & -24-21(-\frac{1}{4})^n+45(-\frac{3}{4})^n & -24+84(-\frac{1}{4})^n-60(-\frac{3}{4})^n\\ -32+7(-\frac{1}{4})^n+25(-\frac{3}{4})^n & -32+7(-\frac{1}{4})^n-45(-\frac{3}{4})^n & -32-28(-\frac{1}{4})^n+60(-\frac{3}{4})^n\\ -14+14(-\frac{1}{4})^n & -14+14(-\frac{1}{4})^n & -14-56(-\frac{1}{4})^n\end{pmatrix},$$

et cette matrice M^n vérifie la relation $\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}A_0\\B_0\\C_0\end{pmatrix}$.

5. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n=-\dfrac{1}{70}\begin{pmatrix}-24&-24&-24\\-32&-32&-32\\-14&-14&-14\end{pmatrix}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}=\lim_{n\to+\infty}M^n\begin{pmatrix}A_0\\B_0\\C_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{70}\begin{pmatrix}-24&-24&-24\\-32&-32&-32\\-14&-14&-14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0\\B_0\\C_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{70}\begin{pmatrix}-24A_0-24B_0-24C_0\\-32A_0-32B_0-32C_0\\-14A_0-14B_0-14C_0\end{pmatrix}.$$

Les limites sont bien indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début car pour chaque ligne, les poids associés à A_0,B_0,C_0 sont égaux.

Exercice 41

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\2&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$. Par conséquent, $Sp(A)=\{-1,2\}$. Les valeurs propres étant distinctes, la matrice A est diagonalisable.
Déterminons maintenant les sous-espaces propres associés.
   - Soient $E_{-1}=\ker(A+I)$ et $X=(x,y)\in E_{-1}$. On a
   $$(A+I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&-2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}4x-2y&=&0\\2x-y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}\\y=2x\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $X=(x,2x)=x(1,2)$, $x\in\mathbb{R}$.
   - Soient $E_2=\ker(A-2I)$ et $X=(x,y)\in E_2$. On a
   $$(A-2I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x-2y&=&0\\2x-4y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2y\\y\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $X=(2y,y)=y(2,1)$, $y\in\mathbb{R}$.

2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1$ qui ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si on travaille dans $\mathbb{C}$, $|B-\lambda I|=0\Leftrightarrow(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i))=0$, ce qui montre que B admet deux valeurs propres distinctes ($Sp(B)=\{1-i,1+i\}$) et donc que B est diagonalisable. L'initiation aux nombres complexes n'étant pas de mise dans ce chapitre, on ne déterminera pas les sous-espaces propres associés.

3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $|C-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$. Par conséquent, $Sp(C)=\{2\}$ et la multiplicité algébrique de $\lambda=2$ vaut $\alpha=2$. La valeur propre étant multiple, on ne sait pas si A est diagonalisable. Déterminons maintenant le sous-espace propre associé à cette valeur propre. Soit $X=(x,y)\in\ker(A-2I)$, on a alors
$$(A-2I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\-x-y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}\\y=-x\end{array}\right. .$$
Le système admet une infinité de solutions de la forme $X=(x,-x)=x(1,-1)$, $x\in\mathbb{R}$. Mais comme $(\dim(E_2)=1)\neq(\alpha=2)$, C n'est pas diagonalisable.

Exercice 42

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 9 & 0 \\ -6 & 8-\lambda & 0 \\ -6 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -7-\lambda & 9 \\ -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda+2) =$ $(2-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$. On a donc bien l'expression attendue du polynôme caractéristique de A, ce qui implique que $Sp(A) = \{-1, 2\}$ où $\lambda_1 = -1$ est de multiplicité algébrique $\alpha_1 = 1$ et $\lambda_1 = 2$ est de multiplicité algébrique $\alpha_2 = 1$. On remarque également que $(\mathrm{tr}(A) = -7+8+2) = (\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = -1+2+2) = 3$.
2. Intéressons nous aux vecteurs propres de A.
   - Soient $E_{-1} = \ker(A+I)$ et $X = (x, y, z) \in E_{-1}$. On a
   $$(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -6x+9y & = & 0 \\ -6x+9y & = & 0 \\ -6x+6y+3z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = y \end{array}\right. .$$
   Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X = (\frac{3}{2}y, y, y) = \frac{1}{2}y(3, 2, 2)$, $y \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $y = 2$.
   - Soient $E_2 = \ker(A-2I)$ et $X = (x, y, z) \in E_2$. On a
   $$(A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -9x+9y & = & 0 \\ -6x+6y & = & 0 \\ -6x+6y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right. .$$
   Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X = (y, y, z) = (y, y, 0) + (0, 0, z) = y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, $y, z \in \mathbb{R}$. On pourra choisir $(y, z) = (1, 0)$ et $(y, z) = (0, 1)$.

   Comme $\dim(E_{-1}) = \alpha_1 = 1$ et $\dim(E_2) = \alpha_2 = 2$, on peut affirmer que A est diagonalisable.
3. Si on pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la théorie nous permet d'affirmer que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 43

1. U_n décrivant le nombre de façons de vider un tonneau de n litres avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres,
   – U_1 désigne le nombre de façons de vider un tonneau de 1 litre avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres. Il n'y a donc logiquement qu'une seule façon (on utilise 1 fois le pot de 1l) : $U_1 = 1$.
   – U_2 désigne le nombre de façons de vider un tonneau de 2 litres avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres. Il n'y a donc logiquement que deux façons (on utilise deux fois le pot de 1l ou 1 fois le pot de 2l) : $U_2 = 2$.
   – U_3 désigne le nombre de façons de vider un tonneau de 3 litres avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres. D'après l'énoncé, $U_3 = 3$.
2. (a) Comme $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ et $U_{n+1} = U_{n+1}$, on peut écrire $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$ et poser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-1$. Ainsi, $Sp(A) = \{\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$ et donc, comme les valeurs propres de A sont toutes distinctes, A est diagonalisable.

   (c) Déterminons les sous-espaces propres de A associés à ces deux valeurs propres.
   - Soient $E_{\lambda_1} = \ker(A-\lambda_1 I)$ et $X = (x, y) \in E_{\lambda_1}$. On a
   $$(A-\lambda_1 I)X = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+y & = & 0 \\ x+(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2})y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (x, \frac{1+\sqrt{5}}{2}x) = \frac{1}{2}x(2, 1+\sqrt{5})$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra prendre $x = 2$.
   - Soient $E_{\lambda_2} = \ker(A-\lambda_2 I)$ et $X = (x, y) \in E_{\lambda_2}$. On a
   $$(A-\lambda_2 I)X = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+y & = & 0 \\ x+(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2})y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x \end{array}\right. .$$
   Le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (x, \frac{1-\sqrt{5}}{2}x) = \frac{1}{2}x(2, 1-\sqrt{5})$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra prendre $x = 2$.

   Par conséquent, si on pose $D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$, la théorie nous permet d'avancer que $D = P^{-1}AP$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $A^n = PD^nP^{-1}$, on a

$$
\begin{aligned}
A^n &= -\frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ -(1+\sqrt{5}) & 2\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ (1+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & (1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ -(1+\sqrt{5}) & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= -\frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2(1-\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2(1+\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & -4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ -4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & -2(1+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2(1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}.
$$

(e) D'après 1.(a), on a $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1}\end{pmatrix} = \ldots = A^n\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2\end{pmatrix}$ à ce qu'on peut appeler le rang $n+2$. Donc, on a au rang n, $\begin{pmatrix} U_{n-1} \\ U_n\end{pmatrix} = A^{n-2}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2\end{pmatrix}$ et en particulier, si on considère la 2ème composante de ce vecteur :

$$
\begin{aligned}
U_n &= \left(-4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)U_1 - \left(2(1+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 2(1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)U_2 \\
&= -4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - 2\left(2(1+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 2(1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) \\
&= -4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - 4(1+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - 4(1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \\
&= -4(2+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - 4(1-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 44

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^4$ car $A-\lambda I$ est une matrice triangulaire supérieure et que dans ce cas, son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux principaux. Par conséquent, A admet 1 seule valeur propre de multiplicité algébrique $\alpha = 4$. Étudions le sous-espace propre associé : soient $E_1 = \ker(A-I)$ et $X = (x,y,z,t) \in E_1$. On a
$$
(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha y & = & 0 \\ \alpha z & = & 0 \\ \alpha t & = & 0 \\ 0 & = & 0\end{array}\right. .
$$
On distingue alors deux cas :
– Si $\alpha = 0$, les 4 équations se résument à $0 = 0$ et donc le système admet une infinité de solutions de la forme $X = (x,y,z,t) = (x,0,0,0) + (0,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,t) = x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1)$. Par conséquent, $\dim(E_1) = 4 = \alpha$ et A est diagonalisable.
– Si $\alpha \neq 0$, le système nous donne $x = y = z = 0$ et admet de ce fait une infinité de solutions de la forme $X = (0,0,0,t) = t(0,0,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Comme $(\dim(E_1) = 1) \neq (\alpha = 4)$), la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$
\begin{aligned}
|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} &\underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda+1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} \\
&= (-\lambda-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} (-\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 2 & 2 \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} \\
&\underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (-\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & -\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda-1)(1+\lambda)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 4 \\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)^2((1-\lambda)^2 - 4) = (\lambda+1)(-1-\lambda)(3-\lambda) = -(1+\lambda)^3(3-\lambda).
\end{aligned}
$$
La matrice B admet donc pour valeurs propres $\lambda_1 = -1$ (de multiplicité algébrique $\alpha_1 = 3$) et $\lambda_2 = 3$ (de multiplicité algébrique $\alpha_2 = 1$).
Étudions les sous-espaces propres de A associés à ces deux valeurs propres.
• Soient $E_{-1} = \ker(B+I)$ et $X = (x,y,z,t) \in E_{-1}$. On a

$$(B+I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t&=&0\\ x+y+z+t&=&0\\ x+y+z+t&=&0\\ x+y+z+t&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y-z-t\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\\ t\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X=(-y-z-t,y,z,t)=y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-1,0,0,1)$, $y,z,t\in\mathbb{R}$. Comme $\dim(E_{-1})=3=\alpha_1$, on peut d'ores et déjà affirmer que B est diagonalisable (une valeur propre simple ne pose jamais de problème en diagonalisation).

- Soient $E_3=\ker(B-3I)$ et $X=(x,y,z,t)\in E_3$. On a

$$(B-3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -3x+y+z+t&=&0&(L_1)\\ x-3y+z+t&=&0&(L_2)\leftarrow 3(L_2)+(L_1)\\ x+y-3z+t&=&0&(L_3)\leftarrow 3(L_3)+(L_1)\\ x+y+z-3t&=&0&(L_4)\leftarrow 3(L_4)+(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -3x+y+z+t&=&0&(L_1)\\ -8y+4z+4t&=&0&(L_2)\\ 4y-8z+4t&=&0&(L_3)\leftarrow 2(L_3)+(L_2)\\ 4y+4z-8t&=&0&(L_4)\leftarrow 2(L_4)+(L_2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x+y+z+t&=&0\\ -8y+4z+4t&=&0\\ -12z+12t&=&0\\ 12z-12t&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=t\\ z=t\\ t\in\mathbb{R}\end{array}\right. .$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X=(t,t,t,t)=t(1,1,1,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 45

1. $$AX_1=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0X_1,$$

   $$AX_2=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=1X_2.$$

   Par conséquent, 0 et 1 sont deux valeurs propres de A (dont on ne connaît pas les multiplicités algébriques).
2. Soient $E_0=\ker(A-0I)=\ker(A)$ et $X=(x,y,z,t)\in E_0$. On a

   $$AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z-2t&=&0\\ z-t&=&0\\ x-y+z&=&0\\ x-y+t&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y\\ y\in\mathbb{R}\\ z=0\\ t=0\end{array}\right. .$$

   Le système admet une infinité de solutions de la forme $X=(y,y,0,0)=y(1,1,0,0)$, $y\in\mathbb{R}$. On a donc $\dim E_0=1$.
3. 0 étant une valeur propre double donc de multiplicité $\alpha_1=2$, on a $(\dim E_0=1)\neq(\alpha_1=2)$. Cela implique que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 46

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-4-\lambda&-6&0\\3&5-\lambda&0\\3&6&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-4-\lambda&-6\\3&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=(5-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$. On en déduit que $Sp(A)=\{-1,2,5\}$.

   Les valeurs propres étant toutes distinctes, la matrice A est diagonalisable. Déterminons les sous-espaces propres de A associés à ces valeurs propres.
   - Soient $E_{-1}=\ker(A+I)$ et $X=(x,y,z)\in E_{-1}$. On a

     $$(A+I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x-6y&=&0\\ 3x+6y&=&0\\ 3x+6y+6z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y\\ y\in\mathbb{R}\\ z=0\end{array}\right.$$

     Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X=(-2y,y,0)=y(-2,1,0)$, $y\in\mathbb{R}$. On pourra prendre $y=1$.
   - Soient $E_2=\ker(A-2I)$ et $X=(x,y,z)\in E_2$. On a

     $$(A-2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -6x-6y&=&0\\ 3x+3y&=&0\\ 3x+6y+3z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y\\ y\in\mathbb{R}\\ z=-y\end{array}\right.$$

     Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X=(-y,y,-y)=-y(1,-1,1)$, $y\in\mathbb{R}$. On pourra prendre $y=-1$.
   - Soient $E_5=\ker(A-5I)$ et $X=(x,y,z)\in E_5$. On a

     $$(A-5I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-9&-6&0\\3&0&0\\3&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -9x-6y&=&0\\ 3x&=&0\\ 3x+6y&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $X = (0,0,z) = z(0,0,1)$, $z \in \mathbb{R}$. On pourra prendre $z = 1$.

Si on pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la théorie nous permet d'affirmer que $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} & 2^n & 0 \\ (-1)^n & -2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

3. Le système proposé se réécrit sous la forme $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$.

On a par conséquent

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)v_0 + (5^n)w_0 \end{pmatrix}.$$