ISCID-CO - PRÉPA 2ème année

DIAGONALISATION

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Mars 2013

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 1

Introduction. Rappels

1.1 Motivations

La diagonalisation d'une matrice, lorsqu'elle est possible, permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à la matrice initiale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P ($\det(P) \neq 0$) telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 1.1.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut alors montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculons tout d'abord l'inverse de P : il y a deux façons de présenter les choses, les tableaux et les systèmes (ou les matrices). Pour inverser une matrice, il faut avant tout être certain qu'elle soit inversible, c'est à cela que sert le déterminant (qu'on verra plus en détails dans le chapitre 2).
   Pour une matrice d'ordre 3, on utilise la règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = (0+0+1) - (0+0+0) = 1 \neq 0. \\ \begin{array}{ccc} \text{- -} & \text{- -} & \text{- -} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

   La matrice P est donc inversible et on peut par conséquent déterminer P^{-1}. On rappelle que l'inverse d'une matrice (carrée) vérifie les propriétés suivantes :

$$P.P^{-1} = P^{-1}.P = I \tag{1.1}$$

   où
   - "." est la multiplication matricielle (non commutative),
   - I est l'élément neutre pour les matrices soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en dimension 3.

   Inverser P revient donc à trouver P^{-1} telle que (1.1) soit vraie.

   Il existe plusieurs méthodes dont les deux suivantes :
   - Les tableaux : on travaille sur les lignes de P à l'aide de combinaisons linéaires spécifiques qui sont appliquées simultanément à I. Une fois la matrice P transformée en I, I s'est quant à elle transformée en P^{-1}.

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (L_1) \Leftarrow (L_3) \\ (L_2) \Leftarrow (L_1) \\ (L_3) \Leftarrow (L_2) \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \Leftarrow (L_3) - 2(L_1) \end{array}$$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right|$. On trouve ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Vérification : $PP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I.$

On trouve de même $P^{-1}P = I$, ce qui prouve que P^{-1} est bien l'inverse de P.

– Les systèmes : On résout le système matriciel $Px = y$ avec x et y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$. Soient donc $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$Px = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 + x_3 & = & y_2 \\ x_1 & = & y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_3 \\ x_2 & = & y_1 \\ x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = P^{-1}y.$$

L'inverse d'une matrice trouve son intérêt essentiellement dans l'inversion de systèmes linéaires. Supposons qu'on ait à résoudre le système $(S) \left\{ \begin{array}{cl} y = 4 & (L_1) \Leftarrow (L_3) \\ 2x + z = 5 & (L_2) \Leftarrow (L_1) \\ x = 6 & (L_3) \Leftarrow (L_2) \end{array} \right.$

(a) On peut utiliser la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & & & = 6 \ (L_1) \\ & y & & = 4 \ (L_2) \\ 2x & & +z & = 5 \ (L_3) \Leftarrow (L_3) - 2(L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & & & = 6 \\ & y & & = 4 \\ & & z & = -7 \end{array} \right.$$

(b) On utilise l'inverse de la matrice exprimant (S). Le système (S) peut en effet se réécrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow PX = b \Leftrightarrow P^{-1}PX = P^{-1}b \Leftrightarrow IX = P^{-1}b \Leftrightarrow X = P^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

L'avantage de (a) est qu'on n'a pas à calculer explicitement l'inverse de P (même si on reconnaît des opérations semblables apparaissant dans le calcul de l'inverse). Par contre, pour chaque second membre différent, il y a une résolution différente.
L'avantage de (b) pallie l'inconvénient de (a), le seul défaut étant le calcul explicite de P^{-1}, qui n'est pas toujours indispensable.

2. Retour à l'exemple. Maintenant qu'on dispose de P^{-1}, calculons le produit matriciel PDP^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

(on rappelle que le produit matriciel est associatif c'est-à-dire que $PDP^{-1} = (PD)P^{-1} = P(DP^{-1})$).

Quels sont les intérêts de la diagonalisation ? Outre le fait que A se décompose comme un produit de trois matrices dont l'une est diagonale, la diagonalisation propose les attraits suivants :

– La puissance n-ième de A devient très simple à calculer. Par exemple,
$$A^5 = (PDP^{-1})^5 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) =$$
$$PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = P(DDDDDD)P^{-1} = PD^5P^{-1}.$$
Comme D est une matrice diagonale, D^5 est très simple à calculer.
– Les vecteurs colonnes de P soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont appelés les *vecteurs propres* de A. Les coefficients $\{2, 1, 1\}$ de D sont appelés les *valeurs propres* de A. Les valeurs propres et vecteurs propres jouent un rôle prépondérant dans de nombreux aspects de la théorie économique puisqu'ils constituent les éléments des solutions explicites des modèles linéaires dynamiques.
En outre, les signes des valeurs propres déterminent la stabilité de l'équilibre dans les modèles dynamiques non-linéaires.
Ces signes sont également l'élément clé pour déterminer la nature d'une matrice symétrique. Par conséquent, ils jouent un rôle central dans les conditions du second ordre qui distinguent les maxima des minima dans les problèmes économiques.

Conclusion de l'introduction : les valeurs propres d'une matrice de format $n \times n$ sont les n nombres qui résument les propriétés essentielles de cette matrice.

Connaissances essentielles :
– mise en place d'un système linéaire,
– résolution par la méthode de Gauss-Jordan,
– traduction matricielle,
– produit matriciel (procédure, propriétés du produit, élément neutre, inverse)

On rappelle ci-dessous les notions fondamentales utiles pour ce cours sur la diagonalisation.

1.2 Rappels d'algèbre linéaire

1.2.1 Notions de bases

Définition 1.2.1 *Un tableau rectangulaire de la forme ci-dessous*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$
de $n \times p$ nombres (réels) disposés selon n lignes et p colonnes ($n > 0, p > 0$) est appelée une matrice de format $n \times p$. L'élément $a_{ij} \in \mathbb{R}$ de la matrice se trouve à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. La matrice A s'écrit également sous la forme $A = [a_{ij}]$ avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$. Une matrice ayant n lignes et p colonnes est appelée matrice (n, p) ou $n \times p$.

Définition 1.2.2 *Le couple (n, p) est appelé la dimension de la matrice.*

Définition 1.2.3 *Une matrice de dimension $(n, 1)$ est une matrice colonne.*
Une matrice de dimension $(1, p)$ est une matrice ligne.

Notation : L'ensemble des matrices de dimension (n, p) est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors A a pour dimension $(3, 2)$, et par exemple $a_{12} = 3$, $a_{31} = 1$.

Définition 1.2.4 *Soient $B' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \dots, \vec{e_n}'\}$ la base canonique (BC) de $\mathbb{R}^n$ et $B' = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension (n,p). Alors*
- *$\vec{c_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{e_k}'$ est le j-ième vecteur colonne extrait de A, c'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$.*
- *$\vec{l_i} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\vec{e_k}$ est le i-ième vecteur ligne extrait de A, c'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip})$.*

Exemple 1.2.2 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ la BC de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ la BC de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\vec{c_1} = 2\vec{e_1}' + 4\vec{e_2}' + \vec{e_3}',\ \vec{c_2} = 3\vec{e_1}' + 2\vec{e_2}'$$
$$\vec{l_1} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2},\ \vec{l_2} = 4\vec{e_1} + 2\vec{e_2},\ \vec{l_3} = \vec{e_1}.$$

1.2.2 Opérations sur les matrices

Définition 1.2.5 - *Addition de deux matrices*
Soient deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ toutes deux de dimension (n,p). On additionne terme à terme pour obtenir

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

de dimension (n,p).

Exemple 1.2.3 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+0 & 2+1 \\ 1+1 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.2.1 *Soient A, B et C trois matrices de dimension (n,p) et 0 la matrice (n,p) dont les éléments sont tous égaux à 0. Alors*
1. *$(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité),*
2. *$A + 0 = A$ (élément neutre),*
3. *$A + (-A) = 0$ (opposé),*
4. *$A + B = B + A$ (commutativité).*

Remarque 1.2.1 L'opposé de A est défini par $-A = [-a_{ij}]$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Définition 1.2.6 - *Mutliplication d'une matrice par un scalaire*
Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension (n,p) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice λA comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par λ : $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$. λA est aussi de dimension (n,p).

Exemple 1.2.4 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$. Alors $\lambda A = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.2.2 L'opposé de A vérifie $-A = (-1)A$.

Propriété 1.2.2 *Soient A et B deux matrices de dimension (n,p) et λ, μ deux réels.*

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
2. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
4. $1 \times A = A$ *et* $0 \times A = 0$.

Définition 1.2.7 - *Multiplication de matrices*
Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice (n,p) et $B = [b_{ij}]$ une matrice (p,q) le produit des deux matrices $C = AB$ a pour dimension (n,q) et s'écrit :

$$C = [c_{ij}] \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, q.$$

Remarque 1.2.3 Le produit de deux matrices n'est réalisable que si le nombre de colonnes de A (la matrice à gauche) est égal au nombre de lignes de B (la matrice à droite).

Exemple 1.2.5 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le produit AB est réalisable et $AB = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.2.4 En général la multiplication de deux matrices n'est pas commutative :
- Si AB existe, BA n'existe pas forcément.
- Si BA existe alors généralement $AB \neq BA$.

Propriété 1.2.3 *Soient $A(n,p)$, $B(p,q)$, $C(q,s)$, $D(p,q)$ et $E(q,n)$.*

1. $(AB)C = A(BC)$ *(associativité [matrice de dimension (n,s)]),*
2. $A(B+D) = AB + AD$ *(distributivité à gauche [matrice de dimension (n,q)]),*
3. $(B+D)E = BE + DE$ *(distributivité à droite [matrice de dimension (p,n)]).*

Définition 1.2.8 - *Transposition de matrice*
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice transposée de A notée A^t (ou ${}^tA$) est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes :

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Si A a pour dimension (n,p) alors A^t a pour dimension (p,n).

Exemple 1.2.6 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice transposée de A est égale à $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 1.2.4 *Soient $A(n,p)$, $B(n,p)$, $C(p,q)$ trois matrices et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$,
2. $(A^t)^t = A$,
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,
4. $(AC)^t = C^t A^t$.

1.2.3 Matrices carrées, matrices élémentaires

Définition 1.2.9 *Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée matrice carrée. Si elle a pour dimension (n, n), on dit alors qu'elle est d'ordre n.*

Rappelons que l'addition et la multiplication de matrices ne sont pas définies pour des matrices quelconques. Cependant, si on considère uniquement des matrices carrées d'ordre n donné, alors les opérations d'addition, de multiplication par un scalaire, et de transposition sont définies et leurs résultats sont encore des matrices carrées d'ordre n.

Définition 1.2.10 *On appelle diagonale (ou diagonale principale) d'une matrice carrée d'ordre n, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ de la matrice.*

Définition 1.2.11 *Une matrice carrée $D = [d_{ij}]$ est dite diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est fréquemment notée $D = diag(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ où certains ou tous les scalaires d_{ii} peuvent être égaux à 0.*

Définition 1.2.12 *Une matrice carrée d'ordre n ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs, est notée I_n et est appelée matrice unité ou matrice identité.*

Propriété 1.2.5 *Quelle que soit $A(n, p)$, $AI_n = I_nA = A$.*

Propriété 1.2.6 *La matrice λI_n, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, est appelée matrice scalaire. C'est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à λ.*

Remarque 1.2.5 On parle de matrice scalaire car elle joue le même rôle que celui d'un scalaire dans la multiplication d'une matrice par un scalaire : $A(\lambda I_n) = (\lambda I_n)A = \lambda A$.

Définition 1.2.13 *Une matrice carrée A, d'ordre n, est dite inversible ou non singulière, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B est unique, d'ordre n. On l'appelle matrice inverse de A et on la note A^{-1}.*

Remarque 1.2.6 La relation précédente est symétrique, c'est-à-dire que si B est l'inverse de A alors A est l'inverse de B.

Définition 1.2.14 *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si $A^t = A$. Autrement dit si $\forall i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.*

Définition 1.2.15 *Une matrice triangulaire est une matrice carrée dont les éléments au dessous (ou au dessus) de la diagonale principale sont tous nuls.*

1.3 Quelques matrices usuelles

1.3.1 Matrices de commandes et des prix

Pour un consommateur susceptible d'acheter n produits $P_1, P_2, \ldots, P_n$, chacune de ses commandes correspond à un vecteur C d'ordre n, soit $C = (x_1, \ldots, x_n)$ où x_i désigne la quantité (par exemple le nombre de kilos) du produit P_i. La quantité totale de tous les produits achetés par la commande C est donnée par l'expression matricielle $(x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si la commande C est doublée, on obtient la commande $2C$, définie par le produit du vecteur C par le scalaire 2.

Si on globalise deux commandes C_1 et C_2, on obtient la commande $C_1 + C_2$, qui est la somme vectorielle des deux vecteurs C_1 et C_2.
Si on s'occupe à présent du prix total à payer pour une commande $C = (x_1, \ldots, x_n)$ et si le prix unitaire du produit P_i vaut p_i, le montant global à payer pour C est donné par le produit scalaire $C^t P$ où P est le vecteur d'ordre n dont les composantes sont les p_i.
Cet exemple simple montre que toutes les opérations fondamentales de l'algèbre vectorielle sont naturelles. Son adaptation au cas de plusieurs consommateurs permet d'illustrer les principales opérations de l'algèbre matricielle.
Supposons par exemple que 3 clients puissent acheter 4 produits. Pour fixer les idées, on considère une commande définie par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

les lignes étant relatives aux personnes et les colonnes se rapportant aux biens. Les quantités globales (des 4 produits) achetées (par les 3 personnes) sont rassemblées dans un vecteur colonne d'ordre 3 (chaque ligne se rapportant à un client) obtenu en effectuant le produit matriciel $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$. De même les quantités de chaque produit réellement commandées sont fournies par un vecteur ligne d'ordre 4 (chaque colonne se rapportant à un bien), qui est le résultat du produit matriciel $(1\ 1\ 1)C = (10\ 3\ 11\ 4)$. Pour doubler la commande C, il suffit de considérer la matrice $2C$.
De la même manière, l'addition de deux commandes, résumées par les matrices C_1 et C_2, est évidemment donnée par la somme $C_1 + C_2$. L'addition de deux matrices apparaît dès lors comme une opération tout à fait naturelle.

Penchons nous à présent sur les prix unitaires de ces quatre produits : ils peuvent être rassemblés dans une nouvelle matrice dont les lignes concernent les biens, la première colonne les prix unitaires d'achat et la seconde colonne les frais unitaires de transport. À titre d'exemple, soit

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0,2 \\ 2 & 0,1 \\ 4 & 0,3 \\ 5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

la matrice des prix unitaires pour les quatre articles considérés. Il est aisé de constater que les factures globales à payer pour les clients pour l'achat et le transport de biens commandés à l'aide de la matrice C sont réunies dans la matrice

$$F = CP = \begin{pmatrix} 45 & 2,5 \\ 35 & 1,5 \\ 30 & 2 \end{pmatrix}$$

tandis que les sommes totales à payer par chacun des trois clients sont données par le vecteur colonne

$$T = F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47,5 \\ 36,5 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur T peut aussi être obtenu en multipliant la matrice C par le vecteur Q donnant, pour chaque produit, le prix unitaire total à payer (soit la somme du prix unitaire d'achat et du prix unitaire de transport) :

$$T = CQ \text{ avec } Q = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,2 \\ 2,1 \\ 4,3 \\ 5,1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien la règle d'associativité de la multiplication matricielle.
Ainsi on constate que la mutliplication de la matrice C par le vecteur Q agit comme une application d'un espace à 4 dimensions sur un espace à 3 dimensions ; cela signifie concrètement que les trois comptes peuvent être obtenus à partir des 4 prix unitaires.

1.3.2 Matrices de fabrication

On considère la fabrication de différents produits en admettant les deux hypothèses suivantes :
- la production de k unités d'un produit réclame k fois les quantités de facteurs utilisées pour une seule unité de ce produit,
- la production simultanée d'une unité d'un produit A et d'une unité d'un produit B nécessite des quantités de facteurs égales à la somme des quantité nécessaires pour fabriquer une unité de A et une unité de B.

Ces deux conditions sont finalement très naturelles, elles confèrent un caractère linéaire à la production et permettent d'illlustrer aisément les opérations matricielles de base.
En guise d'exemple, on analyse tout d'abord la fabrication de trois produits semi-finis S_1, S_2, S_3 au moyen de 4 facteurs primaires de production F_1, F_2, F_3 et F_4 (qui peuvent être, pour fixer les idées, le travail, le capital, l'énergie et des matières premières). La quantité du facteur F_j nécessaire pour fabriquer une unité de produit S_i est donnée par l'élément a_{ij} de la matrice $M = [a_{ij}]$ appelée matrice de fabrication. Les éléments de M seront supposés fixes aussi longtemps que la technique de production reste inchangée.
On prend comme exemple numérique :

$$M = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 3 & 6 \\ 200 & 10 & 4 & 4 \\ 150 & 20 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la production d'une unité de S_1 réclame 100 (respectivement 50, 3, 6) unités de F_1 (respectivement F_2, F_3 et F_4). De même pour S_2 et S_3.
Pour fabriquer k unités de chaque produit, les quantités des facteurs utilisées seront donc données par les éléments de la matrice kM. Par contre si on veut fabriquer des quantités différentes des trois produits soit k_1 (respectivement k_2 et k_3) unités de S_1 (respectivement S_2 et S_3), les quantités de facteurs seront rassemblées dans le produit matriciel $diag(k_1, k_2, k_3)M$.

Poursuivons l'examen de l'exemple. Les 3 produits semi-finis S_1, S_2 et S_3 servent à leur tour pour fabriquer 2 produits finis P_1 et P_2. Pour obtenir une unité de produit P_i, il faut utiliser la quantité b_{ij} de S_j. Les nombres b_{ij} sont les éléments d'une nouvelle matrice de fabrication $N = [b_{ij}]$. Par exemple, soit

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il faut 5 (respectivement 8 et 6) unités de S_1 (respectivement S_2 et S_3) pour fabriquer une unité de P_1. De même pour P_2.
Les quantités de chaque facteur primaire intervenant dans la fabrication de chaque produit fini peuvent être rassemblées dans une matrice P, dont les lignes se rapportent aux produits finis et les colonnes aux facteurs primaires ; on obtient P en effectuant le produit matriciel NM. Avec les données ci-dessus on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 3000 & 450 & 77 & 92 \\ 1300 & 180 & 32 & 38 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Le double classement en comptabilité

En comptabilité, on a souvent recours à la méthode en partie double, qui consiste à enregistrer deux fois chaque opération ; une première fois au crédit d'un certain compte, une deuxième fois au débit d'un autre compte. Pour éviter toute erreur, il convient de toujours vérifier l'égalité entre la somme des crédits et des débits.

Ce double classement peut avantageusement être réalisé sous forme matricielle ; dans ce cas, nous verrons que les contrôles sont automatiques.
On construit une matrice carrée d'ordre n, notée $M = [a_{ij}]$, dont les indices des lignes (respectivement de colonnes) indiquent les numéros des comptes crédités (respectivement débités). Le nombre a_{ij} désigne la somme débitée au compte j et créditée au compte i.
On considère à présent le vecteur colonne U composé de n éléments égaux à 1. Le produit matriciel MU définit un vecteur colonne dont les éléments $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont les sommes des crédits relatifs aux comptes correspondant aux indices de lignes, puisque $c = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Par ailleurs le produit $U^t M$ donne un vecteur ligne dont les éléments $d_1, d_2, \ldots, d_n$ représentent la somme des débits correspondant aux indices de colonnes, car $d_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. En résumé,

$$MU = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } U^t M = (d_1 \ d_2 \ldots d_n).$$

La balance des comptes s'effectue en comparant les sommes des crédits et des débits. Or le total des dédits de tous les comptes vaut

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = (d_1 \ d_2 \ldots d_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (U^t M)U$$

De même, le total des crédits de tous les comptes est égal à

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = (1 \ 1 \ldots 1) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = U^t(MU)$$

En vertu de l'associativité du produit matriciel, on a

$$(U^t M)U = U^t(MU) = U^t MU \text{ d'où } \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Ainsi l'ensemble des comptes est toujours en équilibre dans le double classement réalisé matriciellement.

1.3.4 Matrices de contingence

La répartition d'individus selon deux critères peut être décrite par une table de contingence. Il s'agit d'une matrice $N = [n_{ij}]$, de format $p \times q$, qui croise les p modalités d'une variable x et les q modalités d'une variable y, l'élément n_{ij} désigne donc le nombre d'occurences simultanées des modalités i de x et j de y.
On note $n_{i.}$ (respectivement $n_{.j}$) la fréquence marginale de la ligne i (respectivement de la colonne j), c'est-à-dire la somme des nombres figurant sur la ligne i (respectivement de la colonne j).
La ligne i de N définit la répartition des $n_{i.}$ individus possédant la modalité i de x selon les diverses modalités de y.
Très souvent, on ne s'intéresse qu'au profil des individus de la ligne i, c'est-à-dire aux probabilités conditionnelles pour un individu d'appartenir à la modalité j de y sachant qu'il possède la modalité i pour x. Ceci justifie le remplacement de la table N par la matrice

$$P_1 = \left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}\right).$$

Des considérations analogues relatives aux modalités de y conduisent à étudier la matrice

$$P_2 = \left(\frac{n_{ij}}{n_{.j}}\right).$$

Ces deux nouvelles matrices P_1 et P_2 peuvent être construites en multipliant N par une matrice diagonale adéquate. De fait, pour $D_l = diag(n_{1.}, n_{2.}, \ldots, n_{p.})$ et $D_c = diag(n_{.1}, n_{.2}, \ldots, n_{.q})$, $P_1 = D_l^{-1}N$ et $P_2 = ND_c^{-1}$, pour autant bien-entendu que chaque $n_{i.}$ et chaque $n_{.j}$ soit non nul.
Lorsque la table de contingence étudiée provient d'un échantillon extrait d'une population unique, il est souvent intéressant de tester l'indépendance dans cette population de deux caractéristiques x et y. À cet effet, on compare les fréquences observées à des fréquences théoriques calculées en supposant précisément les deux caractéristiques indépendantes. Ces fréquences théoriques forment une matrice T, de même format $p \times q$, qui est donnée par le produit suivant : $T = \frac{1}{n} D_l U D_c$ où n désigne l'effectif de l'échantillon soit

$$n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij},$$

et U est la matrice de format $p \times q$ dont tous les éléments sont égaux à 1. Pour évaluer l'accord entre les éléments de N (ou fréquences onservées) et ceux de T (ou fréquences théoriques), on peut alors effectuer un test statistique du χ^2.
Considérons l'exemple numérique suivant : on analyse les effectifs de la main d'œuvre aux États-Unis en 1940, ils sont donnés (en millions) dans le tableau ci-dessous :

x	y	
	salariés	chômeurs
Hommes	34	6,2
Femmes	11,2	1,8

La table de contingence $N = \begin{pmatrix} 34 & 6,2 \\ 11,2 & 1,8 \end{pmatrix}$ donne naissance aux profils, des lignes et des colonnes, résumés respectivement par les deux matrices diagonales

$$D_l = \begin{pmatrix} 40,2 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \text{ et } D_c = \begin{pmatrix} 45,2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

En supposant équivalente la répartition de l'emploi chez les hommes et les femmes, on obtient la matrice des effectifs théoriques suivante :

$$T = \frac{1}{53,2} D_l \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} D_c = \begin{pmatrix} 34,15 & 6,05 \\ 11,05 & 1,95 \end{pmatrix}$$

matrice qui est visiblement assez proche de N. Concrètement, il y a donc lieu d'accepter l'hypothèse de l'indépendance de la situation d'emploi et du sexe (cette conclusion intuitive est d'ailleurs confirmée par un test du χ^2 : la statistique χ^2 vaut $0,0179$, qui est nettement inférieure à la valeur théorique $6,63$, pour un degré de liberté , au seuil de signification de 1%).

1.3.5 Matrices de variances-covariances

Lorsqu'on étudie simultanément deux grandeurs x et y chez n individus, la i-ème personne est caractérisée par les valeurs x_i pour x et y_i pour y. Ces informations peuvent être rassemblées dans une matrice de format $n \times 2$, chaque colonne ayant trait à une grandeur x ou y, chaque ligne à un individu. On désigne par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

la matrice ainsi formée. La moyenne des x_i (respectivement y_i) peut être obtenue en faisant le produit $\frac{1}{n}(1\ldots1)X = (\overline{x}\ \overline{y}) = m$. Le nuage de points (x_i, y_i) possède le point $(\overline{x}, \overline{y})$ comme centre de gravité (ou barycentre). Les données deviennent centrées par rapport à leur moyenne grâce à l'opération suivante

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1-\overline{x} & y_1-\overline{y} \\ x_2-\overline{x} & y_2-\overline{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_n-\overline{x} & y_n-\overline{y} \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ 0 & \overline{y} \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} m.$$

En effectuant le produit $\frac{1}{n}X_0^tX_0$, on obtient une matrice carrée d'ordre 2 et symétrique C, dont les éléments diagonaux sont les variances $V(x) = s_x^2$ et $V(y) = s_y^2$ des x_i et y_i respectivement, les autres éléments valent la covariance $cov(x, y) = s_{xy}$ des x_i, y_i. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice de variances-covariances des x_i et y_i. Elle est semi-définie positive car, pour tout vecteur V d'ordre 2,

$$V^tCV = \frac{1}{n}(X_0V)^tX_0V = \frac{1}{n}\|X_0V\|^2 \geq 0.$$

Les valeurs propres de C sont donc positives ou nulles, leur somme étant égale à la somme $s_x^2 + s_y^2$ des variances. Lorsque les écart-types s_x et s_y ne sont pas nuls, la matrice $D = diag(s_x, s_y)$ est inversible ; dans ces conditions, $D^{-1}CD^{-1}$ n'est rien d'autre que la matrice de corrélation, soit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

où r est le coefficient de corrélation égal à $\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$. La matrice de corrélation est en fait la matrice de variances-covariances dans le cas de variables centrées et réduites, c'est-à-dire relatives aux données

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1-\overline{x}}{s_x} & \frac{y_1-\overline{y}}{s_y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n-\overline{x}}{s_x} & \frac{y_n-\overline{y}}{s_y} \end{pmatrix} = X_0D^{-1}.$$

Ces considérations peuvent être étendues au cas général de p caractères et n individus. La matrice des observations (ou données) est $X = [x_{ij}]$ où x_{ij} représente la valeur du i-ième individu pour la j-ième grandeur. Les moyennes sont rassemblées dans la matrice ligne $m = \frac{1}{n}(1\ 1\ldots1)X$ où la i-ième composante m_i désigne la moyenne de la i-ième grandeur. On a

$$X_0 = [x_{ij} - m_i] = X - \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} diag(m_1, \ldots, m_p),$$

ou encore

$$X_0 = X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} m.$$

Les matrices des variances et covariances et des corrélations, qui sont symétriques et semi-définies positives, sont respectivement égales à

$$C = \frac{1}{n} X_0^t X_0 \text{ et } R = D^{-1} C D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{p1} & \dots & r_{pp-1} & 1 \end{pmatrix},$$

où r_{ij} est le coefficient de corrélation des deux grandeurs d'indices i et j.
Ces matrices sont abondamment exploitées dans l'analyse statistique à plusieurs variables.

1.4 Exercices

Exercice 1 Un capital de 50000 euros est partagé en deux parties. La première partie est placée à 6% et la seconde à 8%. Le revenu annuel est le même que si tout le capital était placé à 6,8%.
Calculer la valeur de chaque partie du capital ainsi placé.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = -2 \ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par :

   $$F(x) = ax \ln x + b \ln(x-1) + c \ln(x+1) \text{ soit une primitive de } f \text{ sur }]-1;+\infty[.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \left(-2\ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2\right) dx$.
   (on donnera la valeur exacte en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$).

Exercice 3 Une entreprise fabrique trois produits A,B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W. La fabrication :
- d'une unité de A consomme 3 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
- d'une unité de B consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W,
- d'une unité de C consomme 0 unité de U, 1 unité de V et 1 unité de W.

L'entreprise dispose d'un stock de 18 unités de U, 9 unités de V et 10 unités de W.
Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs
. x : quantité de produit A fabriqué,
. y : quantité de produit B fabriqué,
. z : quantité de produit C fabriqué.

On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.

1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir x, y et z.
2. Résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
3. Donner en conclusion la réponse au problème.

Exercice 4 Une entreprise de mécanique fabrique trois types de pièces A, B et C dans trois ateliers d'usinage, montage et finitions. Les données techniques et commerciales relatives à cette fabrication sont résumées dans le tableau suivant :

	Nombre d'heures-machines nécessaires à la fabrication d'un lot de 10 pièces			Prix de vente d'un
	usinage	montage	finitions	lot
Pièces A	1	1,5	1,5	335
Pièces B	2	1,5	2,5	515
Pièces C	4	4,5	1,5	925
Coût variable de l'heure (euros)	60	80	50	
Capacité de l'atelier (h/mois)	2000	2400	2400	

1. Existe-t-il un programme de fabrication utilisant à plein les capacités de chaque atelier ?
2. Quel est le bénéfice réalisé :
   (a) lors de la fabrication et de la vente de 800 pièces A, 200 pièces B et 200 pièces C ?
   (b) pour le programmme trouvé au 1. ?

Exercice 5 Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents (L), (C) et (V).
Pour un appareil de type (L), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 10h de travail.
Pour un appareil de type (C), on a besoin de 4kg d'acier, 1kg de peinture et 6h de travail.
Pour un appareil de type (V), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 12h de travail.
On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareils (L), (C) et (V) fabriqués et a, p et t les quantités d'acier (en kg) de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. Déterminer à l'aide des données précédentes le système linéaire induisant x, y, z, a, p et t.
2. En déduire les quantités d'appareils de chaque type (L), (C) et (V) fabriqués en un mois, sachant que 4200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5000 heures de travail ont été nécessaires.

Exercice 6 - Modèle de Walras
Imaginons un marché qui se limiterait à deux produits. La quantité offerte du premier, Q_1, est une fonction de son prix P_1, fonction qu'on suppose affine : $Q_1 = a + bP_1$. De même pour le second : $Q_2 = c + dP_2$.
La quantité demandée D_1 du premier produit dépend bien entendu de son prix P_1 (en général elle diminue quand P_1 augmente), mais aussi du prix du produit P_2, à cause des possibilités de substitution partielle. Nous supposons encore cette fonction affine : $D_1 = e + fP_1 + gP_2$, et de même pour le second produit : $D_2 = h + iP_1 + jP_2$.
La condition d'équilibre du marché est dans ces conditions

$$\begin{aligned} Q_1 - D_1 &= 0 \\ Q_2 - D_2 &= 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} (a + bP_1) - (e + fP_1 + gP_2) &= 0, \\ (c + dP_2) - (h + iP_1 + jP_2) &= 0. \end{aligned}$$

La recherche du système du prix d'équilibre sur ce marché conduit donc à la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues P_1 et P_2, qu'on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (b-f)P_1 - gP_2 & = & e-a \\ -iP_1 + (d-j)P_2 & = & h-c \end{array}\right.$$

ou, avec d'autres notations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}P_1 + a_{1,2}P_2 & = & d_1 \\ a_{2,1}P_1 + a_{2,2}P_2 & = & d_2. \end{array}\right.$$

Retour à l'exercice :
Soit un marché qui ne comporte qu'un modèle de téléviseur couleur HD avec une fonction d'offre

$$Q_1 = -30000 + 100P_1.$$

On ne trouve aussi qu'un modèle de téléviseur classique avec une fonction d'offre

$$Q_2 = -4000 + 50P_2.$$

La fonction de demande de téléviseurs HD est

$$D_1 = 4000 - 9P_1 + 34P_2$$

et la fonction de demande de téléviseurs classiques est

$$D_2 = 3560 + 27P_1 - 136P_2.$$

Déterminer les prix d'équilibre P_1 et P_2 sur ce marché en considérant le modèle de Walras.

Exercice 7 La décomposition LU donne une méthode efficace de résolution d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ pour différentes valeurs de b. Cela requiert beaucoup moins d'étapes de calcul arithmétique que l'inversion d'une matrice, et cela reste possible même si A n'est pas carrée.
Utiliser la décomposition LU pour réécrire le système d'équations sous la forme $LUx = b$. Maintenant, le système peut être résolu en posant d'abord $Ux = z$, puis en résolvant le système d'équations $Lz = b$ par rapport à z, et enfin en résolvant $Ux = z$ par rapport à x. Puisque ces deux systèmes sont triangulaires, seule la substitution en remontant est nécessaire pour les résoudre.

1. Vérifier que les solutions obtenues de cette manière sont précisément les solutions de $Ax = b$.
2. Résoudre le systèmes suivants en utilisant cette technique :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ -10 & -9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ -10 & -9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & a \\ x + y - z & = & b \\ -x - y + 2z & = & c \end{array}\right.$
   (où a, b et c sont des constantes données et x, y et z désignent des inconnues).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Expliquer pourquoi A est inversible et déduire de ce qui précède le calcul de A^{-1}.

Exercice 9 On se donne les tableaux 1 et 2 suivants :

	E_1	E_2	E_3
Ciment (tonnes)	10	8	7
Sable (m^3)	5	3	3
gravillons (m^3)	5	2	2

Tableau 1

	Ciment	Sable	Gravillons
F_1	60	15	18
F_2	54	18	16

Tableau 2

Sur un chantier trois entreprises E_1, E_2 et E_3 interviennent ; leurs besoins journaliers sont décrits dans le tableau 1. Les matériaux utilisés sont vendus par deux fournisseurs F_1 et F_2 ; les prix unitaires en euros sont donnés dans le tableau 2.

On pose $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 & 15 & 18 \\ 54 & 18 & 16 \end{pmatrix}$ respectivement matrices des achats et matrice des prix.

1. Calculer le produit PA et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer le déterminant de A, que peut-on en déduire pour A ?
3. On pose $A' = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & 0,6 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $A' \times A$ en faisant figurer les calculs.
4. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y et z désignent respectivement le nombre de chantiers où chacune des entreprises E_1, E_2, E_3 est présente.
   (a) Calculer le produit AX et interpréter le résultat obtenu.
   (b) Résoudre matriciellement l'équation $AX = \begin{pmatrix} 156 \\ 67 \\ 53 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. M est-elle inversible ?
2. I désigne la matrice unité carrée d'ordre 3.
   (a) Calculer M^2 et M^3. En déduire M^n pour $n \geq 3$.
   (b) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$.
   (c) En déduire que $(I - M)$ est inversible et calculer $(I - M)^{-1}$.

Exercice 11 M étant une matrice carrée, on pose $M^1 = M$ et, pour tout entier naturel n non nul, $M^{n+1} = M \times M^n$.

On considère la matrice D définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, D^3 puis D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
2. Étant données les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, montrer que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $P' \times P$. Que peut-on conclure ?
3. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \times D \times P' = A$.

4. Soit n un entier naturel non nul. Sachant que
$$A^n = (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots (P \times D \times P')$$
(produit de n facteurs $(P \times D \times P')$), utiliser la question 2. pour montrer que $A^n = P \times D^n \times P'$. En déduire les termes de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 12 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$.
On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :
$$\begin{array}{lll} f(\vec{e_1}) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 & f(\vec{e_2}) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 & f(\vec{e_3}) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ g(\vec{e_1}) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 & g(\vec{e_2}) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 & g(\vec{e_3}) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3. \end{array}$$

1. Déterminer les matrices A et B de f et g respectivement, rapportées à la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer $A + B$, $3A$, AB et A^2.
3. (a) Déterminer deux réels x et y tels que $A^2 = xA + yI$ où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}, exprimer A^3 en fonction de A et de I.
   (c) Résoudre le système
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & 1 \\ 2x + y + 2z & = & 2 \\ 2x + 2y + z & = & 4 \end{array} \right.$$
4. On considère le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, déterminer les vecteurs $f(\vec{u})$, $(f + g)(\vec{u})$, $(f_o g)(\vec{u})$, $(f_o f)(\vec{u})$, $f^{-1}(\vec{u})$.
5. Déterminer les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$.
6. On considère les trois vecteurs
   $$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{v}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{v}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
   (c) Déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (d) Déterminer $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.
   (e) Quelle est la matrice D de l'application linéaire f, rapportée à la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 13 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soient les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 2, 0)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Résoudre le système
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 \\ x_2 + 2x_3 & = & y_2 \\ x_1 + x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$
   On exprimera x_1, x_2 et x_3 en fonction de y_1, y_2 et y_3.
   (d) En déduire la matrice inverse P^{-1}.
2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
   $$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_3.$$
   (a) Déterminer la matrice A de f rapportée à la base $\mathcal{B}$, puis calculer A^n pour n entier naturel non nul.

(b) Effectuer le calcul $P^{-1}AP = M$.

(c) En déduire M^n.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0 \end{cases}$$

2. On donne dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = (2,-1,1), \quad \vec{v}_2 = (2,-1,2), \quad \vec{v}_3 = (1,-1,2), \quad \vec{v}_4 = (9,-6,11).$$

   (a) Démontrer que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont linéairement dépendants et donner une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   (b) Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\vec{v}_4$ dans cette base.

3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$; on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{v}_2, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{v}_3.$$

   (a) Donner la matrice de f dans la base naturelle.

   (b) Soit $\vec{w} = (1,-1,1)$. Calculer $f(\vec{w})$.

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer sans calcul que A est une matrice inversible.

   (b) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2A - I$.

   (c) Déterminer A^{-1}.

   (d) Résoudre matriciellement

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. I désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. (a) M est-elle inversible ? (justifier la résponse).

   (b) Calculer M^2 puis M^3 ; en déduire une relation entre M^3 et M.

   (c) En utilisant la relation précédente, montrer que $M^5 = M$.

   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de $M - \lambda I$ et en déduire les valeurs de λ qui annulent ce déterminant.

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} x - 2y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

   Quel lien y a-t-il avec la question 1. (d) ?

   (b) On pose $\vec{\epsilon}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{\epsilon}_3 = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
   Calculer matriciellement les images par f de $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{\epsilon}_2$ et $\vec{\epsilon}_3$.

3. (a) Montrer que $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) On appelle P la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$.
   Former P puis calculer P^{-1}.
   (c) On note B la matrice de f par rapport à la base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Donner l'expression de B dans cette base.
   (d) En utilisant ce qui précède, calculer M^5.

Exercice 16 Dans tout ce qui suit, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On pose $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
   (a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Expliquer pourquoi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice P de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (d) Effectuer le produit matriciel de P par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de P^{-1}.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice B par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$.
   (b) Donner l'expression de B^n pour n entier naturel non nul.
   (c) Calculer $\det(B)$.
3. On appelle A la matrice de f par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on rappelle l'égalité suivante, qu'on admettra, $B = P^{-1}AP$.
   (a) Déduire de l'égalité précédente l'expression de A.
   (b) Montrer que A est une matrice inversible.
4. Soit le système linéaire suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & a \\ z & = & b \\ x + y + z & = & c \end{array} \right. \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des constantes réelles données.}$$

   (a) Résoudre ce système linéaire.
   (b) On appelle M la matrice du système (1), déterminer M^{-1}.

Exercice 17

1. On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer $A + B$ et $A \times B$.
   (b) Calculer le déterminant de A et en déduire celui de C.
   (c) Calculer la matrice inverse de A.

2. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base naturelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \quad f(\vec{k}) = -\vec{i} + 3\vec{k}.$$
   (a) Écrire la matrice de$f$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (b) Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Calculer l'image de $\vec{u}$ par f.
3. On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{K} = -\vec{i} + 3\vec{k}$.
   (a) Démontrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
   (c) Soit $\vec{v} = 4\vec{I} + 6\vec{J} + 8\vec{K}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (d) Soit $\vec{w} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Exercice 18

1. On considère les matrices A et B suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer les produits A^2 et $A \times B$.
   (b) Exprimer la matrice AB en fonction de la matrice I, identité d'ordre 3.
   (c) En déduire la matrice A^{-1}.
2. Soit le système
$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ x + 2y + z &= 7 \\ 2x + y + z &= 8 \end{cases}$$
   Résoudre ce système (on pourra utiliser 1. (c)).
3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Soit le vecteur $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$.
   Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est définie par :
$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$
   (a) Déterminer la matrice de A de f rapportée à la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer les images de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par f.

Exercice 19

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Que vaut la trace de A ?
   (b) Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A.
   (c) A est-elle inversible ?

(d) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

i. Calculer AX.

ii. Résoudre le système linéaire $AX = 6X$.

2. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base naturelle de l'espace $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f, de matrice A, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(a) Quelle est l'image de $\vec{k}$ par f ?

(b) Soient $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2 = -3\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Déterminer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$.

3. (a) Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donner la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(c) Donner l'expression de la matrice B de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.