ISCID-CO - PRÉPA 2ème année
DIAGONALISATION

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Mars 2013

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 2

Les déterminants

Dans l'analyse des modèles économiques, on utilise couramment les déterminants. Ils servent par exemple à déterminer si un système d'équations linéaires admet ou non une solution, à calculer une solution si elle existe et à décider de la qualité de l'approximation par linéarisation d'un système d'équations non-linéaires. Les déterminants sont également les outils-clés pour déterminer la nature d'une forme quadratique et, par conséquent, comme test du second ordre pour distinguer les maxima des minima dans les problèmes d'optimisation.

2.1 Définitions

Le déterminant est un nombre qui pour n'importe quelle matrice carrée donnée permet de tester la non-singularité de la matrice

- pour une matrice (a) de format 1×1, ce nombre ne peut être que "a" lui-même puisque a est inversible si et seulement si a est différent de 0,
- pour une matrice $n \times n$, sa forme échelonnée en ligne (ou triangulaire) ne doit pas comporter de ligne composée uniquement de zéros

  1. Pour une matrice 2×2, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
  2. Pour une matrice 3×3, $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ (cette expression sera également obtenue en développant le déterminant de A à l'aide de la règle de Sarrus).
  3. Pour une matrice d'ordre $n \geq 4$, l'astuce consiste à se ramener à des déterminants d'ordre inférieur jusqu'à obtenir des déterminants d'ordre 2 ou 3. On utilisera en général pour cela les développements des déterminants selon les lignes ou les colonnes.

Illustration. Afin d'échelonner les matrices, on utilise les mêmes techniques que lors de l'inversion d'un système.

1. pour une matrice 2×2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow a_{11}(L_2) - a_{21}(L_1) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

   Dans le cas où a_{11} est non nul, A sera inversible si et seulement si $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(A) \neq 0$.

2. pour une matrice 3×3,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow a_{11}(L_2) - a_{21}(L_1) \\ (L_3) \leftarrow a_{11}(L_3) - a_{31}(L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) \\ (L_3) \leftarrow (a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})(L_2)-(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(L_3) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}) \end{bmatrix}$$

Dans le cas où a_{11} est non nul, A sera inversible si et seulement si $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=\det(A)\neq 0$.

Remarque 2.1.1 Dans les deux expressions précédentes, on note que tous les termes de la matrice A interviennent.

Pour des matrices carrées de taille n supérieures, on a le

Théorème 2.1.1 - *Méthode des cofacteurs*
Soit A une matrice de format $n\times n$ où $A=[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ alors quels que soient i ou j, on a

$$\begin{aligned}\det(A)=|A| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{i,k}) \text{ (développement suivant les éléments de la ligne } i\text{)}\\ &= \sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+j}a_{hj}\det(A_{h,j}) \text{ (développement suivant les éléments de la colonne } j\text{)}\end{aligned}$$

où $A_{i,j}$ est la sous-matrice de format $(n-1)\times(n-1)$ obtenue par la suppression dans A de la ligne i et de la colonne j).

$\det(A_{i,j})$ est appelé le *mineur* de a_{ij}, $X_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ est appelé le *cofacteur* de l'éléments a_{ij}.

Remarque 2.1.2 La répartition des signes $(-1)^{i+j}$ devant les mineurs est alternée à partir du signe $+$ pour l'élément a_{11}. Par exemple, pour un déterminant d'ordre 5, on a la répartition suivante :

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Théorème 2.1.2 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors*

$$\boxed{A \text{ est une matrice inversible si et seulement si } \det(A)\neq 0}.$$

Exemple 2.1.1 Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ issue de l'exemple 1.1.1. On sait que A est inversible puisqu'elle s'écrit comme un produit de matrices inversibles. Vérifions le à l'aide des déterminants, on développe la matrice selon une ligne ou une colonne (où il y généralement une majorité de zéros, afin de simplifier les calculs). Par exemple, si on développe

- selon la première ligne :
$$|A|=(-1)^{1+1}\times(1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$
- selon la première colonne :
$$|A|=(-1)^{1+1}\times(1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\times(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\times(0)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Bien évidemment, quelle que soit la ligne ou la colonne utilisée, on retrouvera le même déterminant.

Exemple 2.1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Étudions l'inversibilité de A. On développe le déterminant de A selon la troisième ligne (par exemple) :

$$|A| = (-1)^{3+3} \times (2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \times (4) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

On décide de développer le premier et le second déterminant selon la première colonne car ils offrent tous les deux le même avantage. Donc

$$|A| = 2 \times \left[(-1)^{1+1} \times (2) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (4) \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] - 4 \times$$
$$\left[(-1)^{1+1} \times (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (4) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right] = 2 \times (+12 - 8) - 4 \times (-44 + 44) = 8 \neq 0,$$

ce qui signifie que A est inversible et donc que tout sytème linéaire utilisant cette matrice admet une solution unique.

Remarque 2.1.3 Dans l'exemple précédent, on a pu remarquer que le second déterminant de taille 3×3 était nul, ce qui signifie que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ est non-inversible ou *singulière*. On peut également remarquer qu'une matrice inversible de taille 4×4 peut très bien impliquer des sous-matrices de taille inférieure pouvant être quant-à elles non-inversibles.

Exemple 2.1.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Étudions l'inversibilité de A.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$ donc A est non-inversible.

Remarque 2.1.4 Si A est construite de telle façon qu'au moins une ligne ou au moins une colonne soit combinaison linéaire de lignes ou de colonnes respectivement alors A est non-inversible ce qui est le cas ici. En effet, $(L_3) = 2 \times (L_1) + (L_2)$. Malgré tout, il est difficile de le voir à l'oeil nu.

Remarque 2.1.5 Considérons un système linéaire basé sur A, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 2x & +3y & +z & = & 1 & (L_1) \\ x & -y & & = & 1 & (L_2) \leftarrow 2(L_2) - (L_1) \\ 5x & +5y & +2z & = & 1 & (L_3) \leftarrow 2(L_3) - 5(L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} 2x & +3y & +z & = & 1 & (L_1) \\ & -5y & -z & = & 1 & (L_2) \\ & -5y & -z & = & -3 & (L_3) \end{array} \right.$$

et on voit bien ainsi que (L_2) et (L_3) sont incompatibles.

2.2 Propriétés

Proposition 2.2.1 *Pour toute matrice A carrée d'ordre n,*

$$\boxed{\det(A) = \det(A^t)}.$$

Donc toute propriété concernant les relations entre les lignes d'une matrice et la valeur de son déterminant est aussi vraie lorsqu'on applique la relation entre les colonnes et la valeur du déterminant.

Proposition 2.2.2 *Si la matrice B est obtenue à partir d'une permutation de deux lignes (ou deux colonnes) de la matrice A de format $n \times n$ alors*

$$\boxed{\det(B) = -\det(A)}$$

Proposition 2.2.3 *Si deux lignes (ou colonnes) de A sont égales*

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

Proposition 2.2.4 *On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes).*

Proposition 2.2.5 *Si la matrice B est construite en multipliant chaque élément de la ligne (colonne) i de la matrice A par un scalaire λ alors*

$$\boxed{\det(B) = \lambda \det(A)}$$

Proposition 2.2.6 *Si la matrice B est construite en multipliant chaque élément de la matrice A par un scalaire λ alors*

$$\boxed{\det(B) = \lambda^n \det(A)}$$

Proposition 2.2.7 *Si la matrice A contient une ligne (colonne) composée uniquement de zéros alors*

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

Proposition 2.2.8 *Le déterminant de la matrice identité I d'ordre n est égal à 1.*

Proposition 2.2.9 *Le déterminant d'une matrice diagonale A est égal au produit de ses éléments diagonaux principaux.*

Proposition 2.2.10 *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux principaux.*

Théorème 2.2.1 *Soient A et B deux matrices quelconques de format $n \times n$ alors*

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

Théorème 2.2.2 *Si A est inversible alors*

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

2.3 Utilisations du déterminant

Puisque le déterminant nous apprend si A^{-1} existe ou pas et si le système $Ax = b$ admet une solution unique ou non, il n'est pas surprenant qu'on puisse se servir du déterminant pour obtenir une formule pour A^{-1} et une formule pour la solution du système. On a besoin pour cela de la *matrice adjointe* de A ou *co-matrice* de A.

Définition 2.3.1 *Considérons une matrice carrée A d'ordre n, la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de A notée Adj(A) (ou Com(A)) est appelée matrice adjointe de A (ou comatrice de A).*

$$Adj(A) = Com(A) = [X_{ij}] = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})].$$

Théorème 2.3.1 *Soit A une matrice carrée non-singulière. Alors,*

$$A \times (Adj(A))^t = (Adj(A))^t \times A = \det(A) \times I_n \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité d'ordre } n.$$

Théorème 2.3.2 *Soit A une matrice carrée non-singulière. Alors,*

1. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(Adj(A))^t$, *et*
2. *(règle de Cramer) la solution unique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système $Ax = b$ d'ordre n est*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \text{ pour } i = 1, \ldots, n$$

où B_i est la matrice A dans laquelle le membre de droite b (ou second membre) remplace la i-ième colonne de A.

<u>*Illustration*</u> pour les systèmes d'ordre 3 : on considère le système :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

La règle de Cramer énonce que (x_1, x_2, x_3) est solution du précédent système avec

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Exemple 2.3.1 Reprenons le système de l'exemple 1.1.1 soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4 \\ 2x + z & = 5 \\ x & = 6 \end{cases}$$

– Utilisons le théorème 2.3.2 et 1. pour retrouver l'inverse de P. On a $\det(P) = 1$ et $\text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}(\text{Adj}(P))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On retrouve bien le résultat.

– Utilisons le théorème 2.3.2 et 2. pour retrouver la solution du système.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = 6, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = 4 \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{|P|} = -7.$$

On retrouve bien le résultat.

2.4 Applications économiques

Cas de l'offre et de la demande

Prenons l'exemple de l'offre et de la demande dans une économie à deux biens. Notons Q_1^s et Q_2^s les quantités de chaque bien offertes par les firmes sur le marché et Q_1^d et Q_2^d les demandes correspondantes exprimées par les consommateurs. Notons P_1 et P_2 les prix des biens et Y le revenu des consommateurs. Nous allons étudier dans ce paragraphe des outils de base de l'économie appliquée : les fonctions d'offre et de demande à élasticité constante.

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_1^d & = & K_1 P_1^{a_{11}} P_2^{a_{12}} Y^{b_1}, \\ Q_2^d & = & K_2 P_1^{a_{21}} P_2^{a_{22}} Y^{b_2}, \\ Q_1^s & = & M_1 P_1^{n_1}, \\ Q_2^s & = & M_2 P_2^{n_2}. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Dans ces fonctions, les élasticités intéressantes sont constantes et sont données par les exposants a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, n_1 et n_2. Par exemple, pour le bien 1, nous avons les élasticités suivantes :

- a_{11} = élasticité-prix de la demande,
- a_{12} = élasticité-prix croisée de la demande (avec le prix du bien 2),
- b_1 = élasticité revenu de la demande,
- n_1 = élasticité-prix de l'offre.

Un second avantage de ces fonctions est qu'on peut les rendre linéaires en prenant le logarithme népérien dans les deux membres des équations (2.1) et en posant :

$$q_i^s \equiv \ln Q_i^s,\ q_i^d \equiv \ln Q_i^d,\ p_i \equiv \ln P_i \text{ et } y \equiv \ln Y.$$

Les élasticités sont maintenant des coefficients du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} q_1^d & = & k_1 + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1 y, \\ q_2^d & = & k_2 + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + b_2 y, \\ q_1^s & = & m_1 + n_1 p_1, \\ q_2^s & = & m_2 + n_2 p_2. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

où les a_{ij}, b_i et n_i sont les élasticités, et les k_i et m_i sont les logarithmes des $K_i$et M_i.

L'égalisation de l'offre et de la demande conduit aux prix d'équilibre : $Q_i^s = Q_i^d$, et donc $q_i^s = q_i^d$ pour $i = 1, 2$. Si $Q_1^s \geq Q_1^d$, la demande des consommateurs engendrera un prix P_1 inférieur ; si $Q_1^s \leq Q_1^d$, la demande des consommateurs engendrera un prix P_1 supérieur. L'égalité $q_i^s = q_i^d$ aboutit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -(-a_{11} + n_1)p_1 + a_{12}p_2 = m_1 - k_1 - b_1 y \\ a_{21}p_1 - (-a_{22} + n_2)p_2 = m_2 - k_2 - b_2 y \end{array}\right. \tag{2.3}$$

où les revenus sont considérés comme exogènes (une variable exogène est par définition explicative, elle est tirée d'observations et souvent d'un consensus qui permet de l'utiliser dans un modèle). La règle de Cramer permet de résoudre explicitement le système (2.3) pour les deux variables endogènes p_1 et p_2 (endogène signifie généré à l'intérieur du système) :

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 - k_1 - b_1 y & a_{12} \\ m_2 - k_2 - b_2 y & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & a_{12} \\ a_{21} & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}} = \frac{(-a_{22} + n_2)(-m_1 + k_1 + b_1 y) + a_{12}(-m_2 + k_2 + b_2 y)}{(-a_{11} + n_1)(-a_{22} + n_2) - a_{12}a_{21}}, \tag{2.4}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & m_1 - k_1 - b_1 y \\ a_{21} & m_2 - k_2 - b_2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & a_{12} \\ a_{21} & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}} = \frac{(-a_{11} + n_1)(-m_2 + k_2 + b_2 y) + a_{21}(-m_1 + k_1 + b_1 y)}{(-a_{11} + n_1)(-a_{22} + n_2) - a_{12}a_{21}}. \tag{2.5}$$

Ces expressions sont compliquées, les obtenir par la méthode du pivot de Gauss appliquée au système (2.3) aurait été fastidieux avec beaucoup de risque d'erreur.
Les équations (2.4) et (2.5) permettent d'observer comment les prix d'équilibre varient en fonction des paramètres du modèle, c'est-à-dire, ici, en fonction des élasticités.

Faisons l'hypothèse que les deux biens sont des *biens normaux*, c'est-à-dire que leur demande augmente lorsque le revenu des consommateurs augmente et, en conséquence, qu'elle diminue lorsque les prix augmentent. Appliquée à notre modèle, cette hypothèse induit que b_1 et b_2 sont positifs et que a_{11} et a_{22} sont négatifs. Supposons maintenant qu'une variation du prix du bien 1 ait un effet plus important sur la demande du bien 1 que sur celle du bien 2, et que l'on ait la même relation pour le bien 2. Mathématiquement, cela se traduit par $|a_{11}| > |a_{12}|$ et $|a_{21}| > |a_{22}|$, et implique que les dénominateurs de (2.4) et (2.5) sont positifs. On peut remarquer dans les équations (2.4) et (2.5) que, pour le bien i, si on augmente l'élasticité-prix de la demande a_{ii}, l'élasticité-prix de l'offre n_i ou l'élasticité-revenu b_i, alors le prix d'équilibre p_i diminuera. Les effets de ces paramètres sur p_j dépendent du signe de l'élasticité croisée a_{ji}. Si a_{ji} est positif, cela signifie qu'une augmentation de p_i augmente la demande q_j^d en bien j. Les biens i et j sont appelés *biens substituables* ou *biens substituts*. À l'observation d'une augmentation du prix du bien i, le consommateur répondra en substituant le bien j au bien i. Dans ce cas, une augmentation de a_{ii} ou n_i, ou une diminution de b_i impliquent une diminution du prix d'équilibre p_j. Si a_{ji} est négatif, les biens i et j sont appelés *biens complémentaires*, ou encore on dit que le bien j est complémentaire au bien i. Dans ce cas, une augmentation de a_{ii} ou n_i, ou une diminution de b_i entraînent une augmentation du prix d'équilibre p_j.

Cette approche permet également d'apprécier les effets, sur les prix d'équilibre, de la mise en place de taxes. Supposons que le gouvernement impose une taxe proportionnelle t sur la consommation du bien 1. Le prix pour les consommateurs est donc augmenté et s'établit à $(1+t)P_1$ au lieu de P_1. Cela modifie les fonctions de demande dans le système (2.1) mais pas les fonctions d'offre. Les logarithmes des fonctions de demande dans (2.2) deviennent

$$\begin{aligned} q_1^d &= k_1 + a_{11}\ln(1+t) + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1 y, \\ q_2^d &= k_2 + a_{21}\ln(1+t) + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + b_2 y \end{aligned}$$

et les équations d'équilibre s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -(-a_{11}+n_1)p_1 + a_{12}p_2 = m_1 - k_1 - a_{11}\ln(1+t) - b_1 y, \\ a_{21}p_1 - (-a_{22}+n_2)p_2 = m_2 - k_2 - a_{21}\ln(1+t) - b_2 y. \end{array} \right.$$

La solution de ce système, obtenue par la règle de Cramer est

$$p_1 = \frac{(-a_{22}+n_2)(-m_1+k_1+a_{11}\ln(1+t)+b_1y) + a_{12}(-m_2+k_2+a_{21}\ln(1+t)+b_2y)}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}, \tag{2.6}$$

$$p_2 = \frac{(-a_{11}+n_1)(-m_2+k_2+a_{21}\ln(1+t)+b_2y) + a_{21}(-m_1+k_1+a_{11}\ln(1+t)+b_1y)}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}. \tag{2.7}$$

Le coefficient de $\ln(1+t)$ dans p_1 est

$$-\frac{-a_{11}(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}.$$

Il est généralement négatif, compris entre 0 et -1. Ainsi, la mise en place d'une taxe sur le bien 1 devrait diminuer le prix d'équilibre (hors taxe) du bien 1. Le coefficient de $\ln(1+t)$ dans p_2 est

$$\frac{n_1 a_{21}}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}.$$

Ainsi, la taxe sur le bien 1 augmentera le prix d'équilibre du bien 2 si celui-ci est un bien substituable au bien 1 ($a_{21} \geq 0$) ou au contraire le diminuera si c'est un bien complémentaire du bien 1 ($a_{21} \leq 0$).

2.5 Exercices

Exercice 20 Un modèle de chaîne haute fidélité en vente promotionnelle est constituée de 3 éléments :
- un amplificateur-récepteur de radio de prix x,
- une platine CD de prix y,
- une paire d'enceintes acoustiques de prix z.

(Les prix sont donnés en euros).
Si une remise de 10% est faite sur le prix x et une remise de 10% sur le prix y, la chaîne complète coûterait $435,6$ euros.
Si les remises sur les prix x et z étaient respectivement de 20% et de 10%, la chaîne complète coûterait $422,4$ euros.
Finalement, si les remises sur les prix y et z étaient respectivement de 10% et de 20%, la chaîne complète coûterait $421,3$ euros.

1. Former le système de trois équations à trois inconnues x, y et z qui résulte des données précédentes.
2. Calculer x, y et z.

Exercice 21 Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de trois méthodes différentes.

Exercice 22 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer la matrice inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 5 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

et déterminer les valeurs de λ qui annulent ces déterminants.

Exercice 24 Soit le système $(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 9 \\ x + 2y - z & = & -6 \end{array} \right.$.

1. Écrire la matrice A du système
2. Montrer que A est inversible. En déduire que (S) admet une solution unique
3. Calculer A^{-1}.
4. Résoudre (S).

Exercice 25

1. Calculer les déterminants suivants :

   (a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

   (b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

2. Développer D_5 suivant la $2^{\text{ème}}$ colonne : $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 26 Résoudre les systèmes suivants (on pourra utiliser les formules de Cramer) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 6 \\ 3x + y - 5z & = & -3 \\ 8x + 3y + 6z & = & -5 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ x + 2y + 4z & = & 0 \\ 5x - 4y + 6z & = & 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y - 8z & = & 0 \\ x - 4y + 3z & = & 0 \\ 2x - y + z & = & 0 \end{array} \right. .$$