MASTER 1 GSI- Mentions ACCIE et RIM **La Citadelle - ULCO**

Mesures et analyses statistiques de données - Probabilités

Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les 3 exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (12 points - estimation : 1h)

Le but de cet exercice est l'étude d'une chaîne de transmissions aléatoires d'une information binaire.

- *Un émetteur E émet une information binaire (c'est-à-dire ne prenant que les valeurs 0 ou 1).*
- *Un récepteur R reçoit cette information qui, pour des raisons non développées ici, peut être conforme ou non à l'information émise.*

Quelle que soit l'information émise par E ("0" ou "1") la probabilité que l'information reçue par R soit conforme à l'information émise par E est égale à p (avec $0 < p < 1$) et la probabilité que l'information reçue par R soit non-conforme à l'information émise est égale à $1 - p$. Ainsi par exemple lorsque l'information émise par E est "0", la probabilité que l'information reçue par R soit "0" est égale à p et la probabilité que l'information reçue par R soit "1" est égale à $1 - p$.

Partie I.

Dans cette partie, l'information binaire est transmise le long d'une chaîne de $n+1$ éléments électroniques notés E_0, E_1,...,E_n.

Chaque élément E_k est successivement récepteur, puis émetteur, excepté le premier élément E_0 qui est seulement émetteur et le dernier élément E_n qui est seulement récepteur.

L'information émise par un émetteur-récepteur est toujours identique à celle reçue.

Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, la transmission d'information de l'élément E_k à l'élément E_{k+1} suivant suit la loi définie en début d'exercice (c'est-à-dire que l'élément E_{k+1} reçoit correctement l'information binaire émise par E_k avec une probabilité égale à p, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $1-p$).

Par ailleurs, on a constaté que la qualité de la transmission d'un élément E_k à l'élément E_{k+1} suivant ne dépend pas de ce qui s'est passé lors des transmissions précédentes.

On note A_k $(1 < k < n)$, l'évènement "la valeur reçue par E_k est identique à celle émise par E_0", et on désigne par p_k sa probabilité. On convient que $p_0 = 1$.

1. Étude du cas particulier $n = 2$.
   (a) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation dans le cas $n = 2$. On précisera sur ce schéma les différentes probabilités.
   (b) Déterminer p_1 et p_2.
2. Étude du cas général. Démontrer que pour tout nombre entier k compris entre 0 et $n-1$ on a :
$$p_{k+1} = (2p-1)p_k + 1 - p.$$
3. On se propose de déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
   (a) Pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à n, on pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$.
      i. Montrer que les $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ sont les premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
      ii. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.
   (b) Démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (c) Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Partie II.

Dans cette partie, l'émetteur émet une information binaire transmise directement, sans passer par des intermédiaires, vers une famille de récepteurs.

Dans la suite de l'exercice on supposera que cette famille est infinie, et on la notera $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Une partie de cette famille de récepteurs $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est "à l'écoute", autrement dit est prête à recevoir l'information émise par E_0, conforme ou non.

On suppose que les transmissions entre l'émetteur E_0 et chacun des récepteurs "à l'écoute" dans la famille $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes les unes des autres et que la règle de transmission est la même que celle définie en début d'exercice (c'est-à-dire qu'un récepteur "à l'écoute" reçoit correctement l'information binaire émise par avec une probabilité égale à p, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $1-p$).

1. On considère que n récepteurs sont "à l'écoute". Déterminer la probabilité que k d'entre eux exactement reçoivent correctement la valeur émise par E_0 (k étant un nombre entier compris entre 0 et n).
2. Le nombre de récepteurs "à l'écoute" est une variable aléatoire X. On admet que cette variable suit une loi de Poisson de paramètre λ, λ étant un nombre réel strictement positif donné. Pour tout entier naturel k on a donc :
$$p(\{X=k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$
On appelle Y la variable aléatoire qui représente le nombre de récepteurs de la famille $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui reçoivent correctement la valeur émise par l'émetteur E_0.
   (a) Décrire par une phrase l'évènement $\{Y=0\}$.
   (b) On appelle B_n l'évènement : "n récepteurs exactement sont à l'écoute".
   Démontrer que
   $$p(\{Y=0\}\cap B_n) = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}.$$
   (On pourra utiliser la formule donnant $p(A\cap B)$ en fonction de probabilités conditionnelles.)
   (c) Justifier que l'on peut décrire l'évènement $\{Y=0\}$ sous la forme suivante
   $$\{Y=0\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[\{Y=0\}\cap B_n].$$
   En déduire que
   $$P(\{Y=0\}) = e^{-\lambda p}.$$
   (On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$).
   (d) Pour tout nombre entier k naturel, déterminer $p(\{Y=k\})$. En déduire que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Donner alors son espérance et sa variance.

Exercice 2 (5 points - estimation : 30')

Dans une usine, on effectue deux opérations indépendantes sur des pièces avant d'obtenir un produit fini que l'on doit calibrer.

1. La première opération est un tournage. Elle est effectuée à l'aide soit d'une machine M_1 soit d'une machine M_2, ces deux machines effectuant le même travail.
   – Chaque jour, 1500 pièces différentes sont tournées par la machine M_1 ; $0,2\%$ d'entre elles sont défectueuses.
   – Chaque jour, 3500 pièces différentes sont tournées par la machine M_2 ; $0,3\%$ d'entre elles sont défectueuses.
   (a) À l'issue de cette première opération, on choisit une pièce au hasard dans le lot mélangé des 5000 pièces tournées sur une journée par les deux machines M_1 et M_2. Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ?
   (On posera T_1 l'évènement "la pièce a été tournée sur la machine M_1", $T_2 = \overline{T_1}$ l'évènement "la pièce a été tournée sur la machine M_2", D_T l'évènement "la pièce est mal tournée", et $\overline{D_T}$ l'évènement "la pièce a été correctement tournée". On cherchera alors à déterminer $p(D_T)$.)

(b) On suppose dans cette question que la pièce choisie est défectueuse. Quelle est dans ce cas la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1 ?

2. La seconde opération est un fraisage. L'expérience montre que 2% de ces fraisages sont mal effectués. On prélève au hasard n pièces d'un lot de pièces fraisées. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces mal fraisées trouvées lors d'un prélèvement de n pièces du lot. Puisque ce lot contient une grande quantité de pièces fraisées, on assimile ce prélèvement de n pièces à un tirage avec remise de n pièces.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
   Donner son espérance et son écart-type en fonction de n.
   (b) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité que, parmi les cinq pièces prélevées, exactement deux pièces soient mal fraisées ?
   (c) Dans cette question, $n = 100$. On peut alors approcher Y par une variable aléatoire Y_P qui suit une loi de Poisson de paramètre 2. Quelle est alors la probabilité que, parmi les 100 pièces prélevées, il n'y en ait pas plus de 2 qui soient mal fraisées ?

Exercice 3 (5 points - estimation : 30')

Dans une urne se trouvent 10 boules numérotées de 0 à 9 identiques au toucher. On tire simultanément 2 boules dans l'urne sans remise et on considère l'aléa numérique X qui à chaque tirage associe le plus petit des 2 nombres portés par les 2 boules.

1. Déterminez la distribution de probabilité de X.
2. Construisez la représentation graphique de la fonction de répartition de X dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculez les probabilités des évènements suivants :
   - $A = \{X < 5\}$,
   - $B = \{X \leq 3\}$,
   - $C = \{1 \leq X \leq 6\}$,
   - $D = \{X \geq 7\}$,
   - $E = \{|X - 5| > 2\}$,
   - $G = \{X^2 - 5X + 4 < 0\}$.

ANNEXE A - Probabilités individuelles de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X=k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k \ λ	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0492	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1454	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2132	0,2240	0,2158	0,1954	0,1898	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002
16									0,0001

ANNEXE B - Probabilités individuelles et cumulées de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X=k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $F(k) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}$:

λ	1		2		3		4		5	
k	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$
0	0,3679	0,3679	0,1353	0,1353	0,0498	0,0498	0,0183	0,0183	0,0067	0,0067
1	0,3679	0,7358	0,2707	0,4060	0,1494	0,1991	0,0733	0,0916	0,0337	0,0404
2	0,1839	0,9197	0,2707	0,6767	0,2240	0,4232	0,1465	0,2381	0,0842	0,1247
3	0,0613	0,9810	0,1804	0,8571	0,2240	0,6472	0,1954	0,4335	0,1404	0,2650
4	0,0153	0,9963	0,0902	0,9473	0,1680	0,8152	0,1954	0,6288	0,1755	0,4405
5	0,0031	0,9994	0,0361	0,9834	0,1008	0,9161	0,1563	0,7851	0,1755	0,6160
6	0,0005	0,9999	0,0120	0,9955	0,0504	0,9665	0,1042	0,8893	0,1462	0,7622
7	0,0001	1,0000	0,0034	0,9989	0,0216	0,9881	0,0595	0,9489	0,1044	0,8666
8			0,0009	0,9998	0,0081	0,9962	0,0298	0,9786	0,0653	0,9319
9			0,0002	1,0000	0,0027	0,9989	0,0132	0,9919	0,0363	0,9682
10					0,0008	0,9997	0,0053	0,9972	0,0181	0,9863
11					0,0002	0,9999	0,0019	0,9991	0,0082	0,9945
12					0,0001	1,0000	0,0006	0,9997	0,0036	0,9980
13							0,0002	0,9999	0,0013	0,9993
14							0,0001	1,0000	0,0005	0,9998
15									0,0002	0,9999
16									0,0001	1,0000

λ	6		7		8		9		10	
k	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$
0	0,0025	0,0025	0,0009	0,0009	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001		
1	0,0149	0,0174	0,0064	0,0073	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0005	0,0005
2	0,0446	0,0620	0,0223	0,0296	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0023	0,0028
3	0,0892	0,1512	0,0521	0,0818	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0076	0,0104
4	0,1339	0,2851	0,0912	0,1730	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0189	0,0293
5	0,1606	0,4457	0,1277	0,3007	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0378	0,0671
6	0,1606	0,6063	0,1490	0,4497	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,0631	0,1302
7	0,1377	0,7440	0,1490	0,5987	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,0901	0,2203
8	0,1033	0,8472	0,1304	0,7291	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1126	0,3329
9	0,0688	0,9161	0,1014	0,8305	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1251	0,4580
10	0,0413	0,9574	0,0710	0,9015	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,1251	0,5381
11	0,0225	0,9799	0,0452	0,9466	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,1137	0,6968
12	0,0113	0,9912	0,0264	0,9730	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0948	0,7916
13	0,0052	0,9964	0,0142	0,9872	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0729	0,8645
14	0,0022	0,9986	0,0071	0,9943	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0521	0,9166
15	0,0009	0,9995	0,0033	0,9976	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0347	0,9513
16	0,0003	0,9998	0,0014	0,9990	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0217	0,9730
17	0,0001	1,0000	0,0006	0,9996	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0128	0,9857
18			0,0002	0,9999	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0071	0,9928
19			0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0037	0,9965
20					0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0019	0,9984
21					0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0009	0,9993
22							0,0001	0,9999	0,0004	0,9997
23								1,0000	0,0002	0,9999
24									0,0001	1,0000