MASTER 1 GSI - Mentions ACCIE et RIM **La Citadelle - ULCO**

Mesures et analyses statistiques de données - Probabilités

Novembre 2013 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

Exercice 1 Cet exercice a pour objet l'étude d'un modèle d'urnes aléatoires dites de "Polya" qui peut servir de modélisation de l'évolution génétique d'une population dans laquelle deux versions d'un même gène coexistent.
On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire. À chaque tirage on tire 1 boule de l'urne puis on la remet dans l'urne avec 1 autre boule de la même couleur.

1. On propose de simuler avec un tableur une suite de tirages dans l'urne qui contient au départ 1 boule blanche et 1 boule noire.
   (a) La simulation d'une suite de tirages avec un tableur fournit le tableau de valeurs ci-dessous :

D13 =B13/(B13+C13)

Tirages	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires	Proportion de boules blanches
0	1	1	0,5
1	2	1	0,67
2	3	1	0,75
3	3	2	0,6
4	3	3	0,5
5	3	4	0,43
6	4	4	0,5
7	4	5	0,44
8	4	6	0,4

Figure 1 – Capture d'écran de tableur

   Justifier que la formule utilisée en B6 peut être $\boxed{\text{=SI(ALEA()<D5 ;B5+1 ;B5)}}$ (la fonction ALEA renvoie, "au hasard", un nombre réel compris entre 0 et 1 exclu).

   (b) Quelle formule faut-il inscrire dans la case D5 et recopier vers le bas pour pouvoir obtenir la simulation d'une suite de tirages ?

2. Soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n tirages, $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X_1.
   (b) À l'aide d'un arbre, déterminer les lois de X_2 et de X_3.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout entier k vérifiant $2 \leq k \leq n$, on a : $P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P(X_n = k/X_{n-1} = k-1)+P(X_{n-1} = k)P(X_n = k/X_{n-1} = k)$.
   (d) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier $k \in \{1, 2 \ldots, n+1\}$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
   (e) Exprimer par une phrase ce que signifie la relation démontrée à la question précédente.
   (f) Pour tout entier $n \geq 2$, on appelle B_n l'événement "tirer 1 boule blanche au n-ième tirage".
      i. Calculer $P(B_3)$.
      ii. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $P(B_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_n = k+1/X_{n-1} = k)$.
      iii. En déduire la probabilité d'obtenir 1 boule blanche au n-ième tirage.

Exercice 2 Indiquer, pour chacune des affirmations indépendantes qui suivent, si elle est vraie ou fausse, puis justifier votre réponse.

1. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on note $P(B/A)$ la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. Alors, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a $P(B/A) \times P(A/B) = 1$.
2. Pour ouvrir une porte, un individu dispose de 10 clés différentes, dont une seule permet d'ouvrir cette porte. Il choisit une clé au hasard, essaie d'ouvrir la porte et, s'il n'y parvient pas, met la clé de côté pour ne pas la réutiliser. La variable aléatoire X indiquant le nombre total de clés essayées (y compris la bonne) suit une loi binomiale.
3. L'affirmation “les deux événements A et B sont indépendants” est équivalente à l'affirmation “la probabilité de l'événement B sachant A est égale à la probabilité de l'événement B”.
4. On désigne par Y la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un jeu. La loi de probabilité de Y est donnée dans le tableau suivant :

Valeur prise par Y	-10	-7	0	3	12	16
Probabilité	0,15	0,25	0,20	0,20	0,15	0,05

Ainsi, le jeu proposé est équitable.

Exercice 3 Dans la fabrication d'appareils électroniques, une entreprise utilise trois types de composants (nommés X,Y,Z) dans les proportions suivantes : 15% de composants de type X, 55% de composants de type Y et 30% de type Z.
On sait que sont défectueux 5% des composants du type X, 3% des composants du type Y et 2% des composants du type Z.
On dispose d'un stock constitué de tels composants dans les proportions indiquées ci-dessus.

1. On prélève un composant de ce stock. Chaque composant a la même probabilité d'être prélevé. On note X l'événement : “le composant est de type X” et on définit de la même manière les événements Y et Z. On note D l'événement : “le composant est défectueux” et B l'événement “le composant n'est pas défectueux”.
   (a) Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit un composant défectueux de type X ?
   (b) Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit défectueux ? On notera p cette probabilité. On vérifiera que $p = 0,03$.
   (c) Les deux événements “le composant est de type X” et “le composant est défectueux” sont-ils indépendants ?
   (d) Sachant que le composant prélevé est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit de type Z ?
2. À l'issue du processus de fabrication, un test permet de repérer les composants défectueux. Ces derniers sont alors remplacés. Le remplacement d'un composant occasionne un surcoût de 2€ s'il est de type X, de 3€ s'il est de type Y, de 5€ s'il est de type Z.
   (a) Déterminer le surcoût moyen de remplacement d'un composant défectueux.
   (b) Si on répercute ce coût sur l'ensemble des composants (défectueux ou non), à combien s'élève en moyenne le surcoût occasionné par la présence de composants défectueux dans le stock ? On arrondira le résultat au centième d'euro inférieur.
3. On prélève cette fois 4 composants dans ce stock. Ce stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 4 composants.
   (a) Déterminer la probabilité que les 4 composants prélevés soient du même type.
   (b) On note N le nombre de composants qui ne sont pas défectueux parmi les 4 composants prélevés. Déterminer à 0,001 près la probabilité qu'au moins 3 des 4 composants prélevés ne soient pas défectueux.