Université du Littoral Côte d'Opale **2010-2011**
L3 Informatique
Probabilités

Devoir Surveillé 2
durée : 1 heure
Sans documents, ni calculatrice.

Questions de cours :
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et soit F sa fonction de répartition.

1. Rappeler la définition de F.
2. Soit b un réel. Montrer que
$$\mathbb{P}(X > b) = 1 - F(b).$$
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que
$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Exercice 1
Soit a un réel. Soit X la variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ par
$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = a.$$

1. Montrer que X est discrète.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.
5. Montrer que X admet une variance que l'on déterminera.

Exercice 2
Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On en choisit deux hasard simultanément.

1. Combien cette expérience aléatoire compte-elle de résultats possibles ?
2. Soit X la variable aléatoire donnant le plus grand des deux jetons choisis.
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Détemriner la loi de X.
   (c) Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.

Exercice 3

Partie A : Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules vertes. On choisit successivement deux boules par tirages sans remise. On note la couleur de chacune des boules piochées en tenant compte de l'ordre.

1. Combien cette expérience aléatoire compte-t-elle de résultats possibles ?
2. En justifiant votre choix, donner $\mathbb{P}(A)$ la probabilité associée à un évènement quelconque A lié à cette expérience aléatoire.
3. On considère la variable aléatoire X_1 prenant la valeur 1 si la première boule piochée est blanche et la valeur 0 sinon. Déterminer la loi de X_1 puis son espérance et sa variance.
4. On considère la variable aléatoire X_2 donnant le nombre de boules blanches parmi les deux boules piochées.
   Déterminer la loi de X_2.

Partie B : On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir deux boules blanches. On note Z_1 la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la première boule blanche piochée. On note Z_2 la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la deuxième boule blanche piochée.

1. Déterminer la loi de Z_1 puis son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z_2.
3. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   $A = \{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 2\}$.
   $B = \{Z_1 = 2\} \cap \{Z_2 = 3\}$.
   $C = \{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 3\}$.
   $D = \{Z_2 = 2\}$,
   $E = \{Z_2 = 3\}$.
4. Déterminer la loi de Z_2.

Lois usuelles discrètes

Nom de la loi	Paramètres	Notation	Loi de X	$\mathbf{E(X)}$	$\mathbf{V(X)}$
Uniforme	$n \in \mathbf{N}^*$	$\mathcal{U}(n)$	Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$
de Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(n, p)$	Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{G}(p)$	Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique	$N \in \mathbf{N}^*$, $n \in \{0, \cdots, N\}$, et $p \in]0, 1[$ tel que $Np \in \mathbf{N}$	$\mathcal{H}(N, n, p)$	Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$
de Poisson	$\lambda \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathcal{P}(\lambda)$	Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ