MASTER 1 GSI- Mentions ACCIE et RIM **La Citadelle - ULCO**

Mesures et analyses statistiques de données - Probabilités

Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1

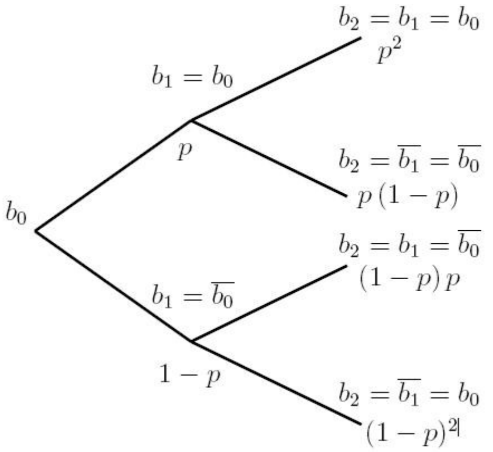
CORRECTION

Exercice 1 12pts

Partie I.

1. Étude du cas particulier $n = 2$.

   (a) 1pt Soit b_0 le bit émis par l'émetteur E_0 (soit le premier relais). E_1 reçoit soit la valeur b_0 avec la probabilité p, soit son complément $\overline{b_0}$ avec la probabilité $1 - p$. On note b_1 la valeur binaire présente au relais E_1.
   Le même phénomène se reproduit entre le premier et le deuxième relais avec chacun des résultats, $b_2 = b_0$ ou $b_2 = \overline{b_0}$, obtenu par deux séquence différentes :



	$b_1 = b_0$ p	$b_1 = \overline{b_0}$ $1-p$
$b_2 = b_1$ p	p^2	$(1-p)\,p$
$b_2 = \overline{b_1}$ $1-p$	$p\,(1-p)$	$(1-p)^2$

   (b) • 0,5pt Par définition, la probablité de l'évènement A_1 est $p_1 = p$.

   • 1pt L'évènement A_2 est la réunion de $\{b_2 = b_1\} \cap \{b_1 = b_0\}$ et $\{b_2 = \overline{b_1}\} \cap \{b_1 = \overline{b_0}\}$ (en rose sur la figure) de probabilités respectives p^2 et $(1-p)^2$. Les deux évènements étant disjoint, $p_2 = p^2 + (1-p)^2$.

2. 1pt D'après les hypothèses, la probabilité conditionnelle de l'évènement A_{k+1} sachant que A_k est réalisé est p, et la probabilité conditionnelle de l'évènement A_{k+1} sachant que A_k n'est pas réalisé est $1 - p$.
   Les probabilités que A_k soit réalisé et ne soit pas réalisé étant respectivement p_k et $1 - p_k$, on a

$$p_{k+1} = p \times p_k + (1-p) \times (1-p_k) = (2p-1)p_k + 1 - p. \tag{1}$$

3. (a) i. 1pt Pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à n, on définit la suite (u_k) par $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$, ou, ce qui revient au même, $p_k = u_k + \dfrac{1}{2}$. En reportant les expressions de p_k et p_{k+1} dans (1), on a

$$u_{k+1} = (2p-1) \times \left(u_k + \frac{1}{2}\right) + 1 - p - \frac{1}{2}.$$

   Après simplification, on obtient la relation de récurrence :

$$u_{k+1} = (2p-1) \times u_k.$$

   On conclut que la suite (u_k) est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{k+1} & = & (2p-1) \times u_k \end{array} \right. \tag{2}$$

Dans la formule (2), la suite $(u_k)_{0\le k\le n}$ apparaît comme la restriction à l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$ d'une suite géométrique de raison $2p-1$ et de premier terme $u_0=\dfrac{1}{2}$.

ii. $\boxed{\text{1pt}}$ L'expression de u_n est immédiate :

$$u_n=\frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

On en déduit l'expression de p_n :

$$p_n=\frac{1+(2p-1)^n}{2}. \tag{3}$$

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Dans les conditions de l'énoncé ($0<p<1$) la suite (u_n) est une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1, cette suite géométrique converge donc vers la limite 0. Finalement, la suite $(p_n)=(u_n)+\dfrac{1}{2}$ converge et admet la limite $\dfrac{1}{2}$.

(c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Quand le nombre des nœuds ou des relais devient infini, le "bruit de la ligne" devient prépondérant devant l'information initiale et la probabilité d'obtenir un "1" ou un "0" est équilibrée.

Partie II.

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On se restreint à un ensemble de n auditeurs et on note Y_n le nombre des auditeurs qui reçoivent correctement l'information.
Les transmissions entre l'orateur E_0 et les n auditeurs fixés sont indépendantes.
Le problème posé suit un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale.
La probabilité d'obtenir exactement k coïncidences entre l'information émise et les n données reçues est fournie par la formule du binôme :

$$p(\{Y_n=k\})=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Quand on considère que n récepteurs sont "à l'écoute", la probabilité que k auditeurs sur n exactement reçoivent correctement la valeur émise par E_0 :

$$p(\{Y_n=k\})=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{4}$$

2. Le nombre des auditeurs est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, de probabilité :

$$p(\{X=k\})=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \tag{5}$$

(a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ La réalisation de l'évènement $\{Y=0\}$ signifie que toutes les données arrivent inversées à leur destinataire.

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ La formule des probabilités composées nous donne :

$$p(\{Y=0\}\cap B_n)=p_{B_n}(\{Y=0\})\times p(B_n).$$

- La probabilité $p_{B_n}(\{Y=0\})=p(\{Y_n=0\})$ est donnée par la formule (4) de la question 1. en prenant $k=0$.
- La probabilité $p(B_n)=p(\{X=n\})$ est définie par l'hypothèse (5)

En regroupant ces deux résultats, on obtient :

$$p(\{Y=0\}\cap B_n)=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}.$$

(c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Les évènements B_n, $n\in\mathbb{N}$, forment une partition de l'univers des possibles, on a donc :

$$\{Y=0\}=\bigcup_{n=0}^{+\infty}[\{Y=0\}\cap B_n].$$

$\boxed{\text{1pt}}$ Les évènements B_n étant disjoints deux à deux, la formule de la probabilité totale donne immédiatement :

$$p(\{Y=0\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(\{Y=0\}\cap B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[(1-p)\lambda^n]}{n!}.$$

On reconnaît le développement de l'exponentielle de $(1-p)\lambda$, ce qui nous permet de simplifier l'expression pour conclure :

$$p(\{Y=0\}) = e^{-\lambda p}.$$

(d) $\boxed{1\text{pt}}$ Soit n un entier naturel non nul et $k \leq n$, les formules (4) et (5) nous permettent de calculer, comme à la question 2.(b), $p(\{Y=k\}\cap B_n)$:

$$p(\{Y=k\}\cap B_n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!} \times p^k(1-p)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n. \tag{6}$$

Pour $n = 0$ ou $n < k$, un retour aux définitions donne

$$p(\{Y=k\}\cap B_n) = 0. \tag{7}$$

L'analyse de la question 2.(c) donne, en utilisant les résultats (6) et (7) :

$$\begin{aligned} p(\{Y=k\}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p(\{Y=k\}\cap B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!}\times p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \times \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^n}{(n)!} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda p}}{k!}. \end{aligned}$$

On reconnaîtune loi de Poisson de paramètre λp.
Les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$sont égales à la valeur du paramètre de la loi de Poisson :

$$E(Y) = \lambda p,\ V(Y) = \lambda p.$$

Exercice 2 $\boxed{5\text{pts}}$

1. (a) $\boxed{1\text{pt}}$ On note T_1 l'évènement “la pièce a été tournée sur la machine M_1”, $T_2 = \overline{T_1}$ l'évènement “la pièce a été tournée sur la machine M_2”, D_T l'évènement “la pièce est mal tournée”, et $\overline{D_T}$ l'évènement “la pièce a été correctement tournée”. On cherchera alors à déterminer $p(D_T)$.
Si on admet l'hypothèse d'équiprobabilité, l'énoncé donne les valeurs suivantes :

- $p(T_1) = \dfrac{1500}{1500+3500} = 0,3,$
- $p(T_2) = \dfrac{3500}{1500+3500} = 0,7,$
- $p_{T_1}(D_T) = \dfrac{0,2}{100} = 0,002,$
- $p_{T_2}(D_T) = \dfrac{0,3}{100} = 0,003.$

La formule de probabilité conditionnelle nous donne :

$$p(D_T\cap T_1) = p(T_1)\times p_{T_1}(D_T) = 6\times 10^{-4} \text{ et } p(D_T\cap T_2) = p(T_2)\times p_{T_2}(D_T) = 21\times 10^{-4}.$$

La formule de probabilité totale nous donne :

$$p(D_T) = p(D_T\cap T_1) + p(D_T\cap\overline{T_1}) = p(D_T\cap T_1) + p(D_T\cap T_2) = 2,7\times 10^{-3}.$$

La probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit défectueuse est donc de $2,7‰$.

(b) $\boxed{1\text{pt}}$ La formule de probabilité conditionnelle nous donne :

$$p(D_T\cap T_1) = p_{D_T}(T_1)\times p(D_T).$$

On connaît $p(D_T\cap T_1) = 6\times 10^{-4}$ et $p(D_T) = 2,7\times 10^{-3}$ et donc

$$p_{D_T}(T_1) = \frac{p(D_T\cap T_1)}{p(D_T)} = \frac{6}{27}.$$

La probabilité qu'une pièce défectueuse ait été tournée par le tour M_1 est de l'ordre de 22%.

2. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces mal fraisées trouvées lors d'un prélèvement de n pièces du lot.
Si on assimile ce prélèvement de n pièces à un tirage avec remise de n pièces, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est une loi binomiale de paramètre $p = 0,02$.

$$p(\{Y = k\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ C_n^k \times 0,02^k \times 0,98^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}.$$

L'espérance $E(Y)$ et l'écart-type σ_Y ont pour valeurs respectives $E(Y) = n \times p = \dfrac{2}{100}n$ et $\sigma_Y = \sqrt{np(1-p)} = \dfrac{7}{50}\sqrt{n}$.

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ La probabilité que, parmi les cinq pièces prélevées, exactement deux pièces soient mal fraisées est :

$$p(\{Y = 2\}) = C_5^2 \times 0,02^2 \times 0,98^3 \simeq 3,8 \times 10^{-3}.$$

(c) $\boxed{\text{1,5pt}}$ On rappelle que la substitution d'une loi de Poisson de même moyenne à une loi binomiale portant sur n tirages de Bernoulli avec une probabilité de succès p est considérée comme licite dès lors qu'on vérifie $n > 50$ et $np < 5$. Dans notre cas, on a $\lambda = np = 2$ et $n = 100$, l'écart-type de la loi binomiale est $1,40$, celui de la loi de Poisson est voisin de $1,41$.
La probabilité que, parmi 100 pièces prélevées, il y ait exactement k pièces mal fraisées est :

$$p(\{Y_p = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} = \frac{2^k}{k!} \times e^{-2}.$$

On en déduit immédiatement

$$p(\{Y_p \leq 2\}) = e^{-2}\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k}{k!} \simeq 0,6766764162.$$

On remarque que le calcul directement effectué sur la loi binomiale en reprenant les résultats de la question 2.(a) donne :

$$p(\{Y_p \leq 2\}) = e^{-2}\sum_{k=0}^{2} C_{100}^k \times 0,02^k \times 0,98^{100-k} \simeq 0,6766856210.$$

On retient que la probabilité que, parmi les 100 pièces prélevées, il n'y en ait pas plus de 2, qui soient mal fraisées est de l'ordre de 68%.

Exercice 3 $\boxed{\text{5pts}}$

Soit Ω l'univers constitué des tirages simultanés de deux boules. On a

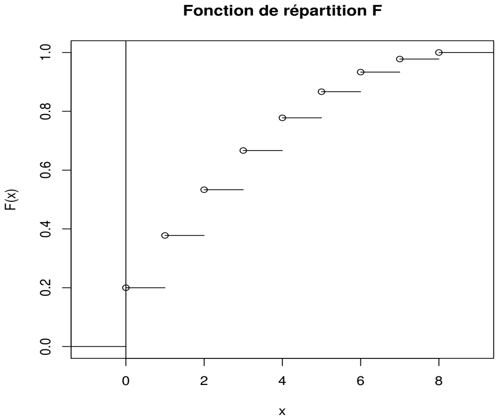
$$\Omega = \{(0,1), (0,2), \ldots, (7,9), (8,9)\}.$$

Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$.

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On a la distribution de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$p_i = p(\{X = x_i\})$	$\frac{9}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a la représentation graphique de la page suivante :
3. On a
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(A) = p(\{X < 5\}) = \dfrac{35}{45} = \dfrac{7}{9}$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(B) = p(\{X \leq 3\}) = \dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{3}$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(C) = p(\{1 \leq X \leq 6\}) = F(6) - F(0) = \dfrac{42}{45} - \dfrac{9}{45} = \dfrac{33}{45}$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(D) = p(\{X \geq 7\}) = 1 - p(\{X < 7\}) = 1 - \dfrac{42}{45} = \dfrac{3}{45}$,



- $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(E) = p(\{|X-5| > 2\})$ or $|X-5| > 2 \Leftrightarrow 2 < X-5 < -2 \Leftrightarrow 7 < X < 3$, par conséquent
$$p(E) = p(\{7 < X\} \cup \{X < 3\}) = p(\{X < 3\}) + p(\{X > 7\}) = \frac{24}{45} + \frac{1}{45} = \frac{25}{45}.$$
- $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(G) = p(\{X^2 - 5X + 4 < 0\}) = p(\{1 < X < 4\}) = \dfrac{13}{45}$. En effet, $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$ à l'aide du calcul du discriminant. Donc $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in [1; 4]$.