MASTER 1 GSI - Mentions ACCIE et RIM **La Citadelle - ULCO**

Mesures et analyses statistiques de données - Probabilités

Novembre 2013 - Contrôle Continu, Semestre 1

CORRECTION

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{12pts}}$

1. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ La formule $\boxed{\text{=SI(ALEA()<D5 ;B5+1 ;B5)}}$ écrite en B6 demande au tableur d'y marquer la valeur de la cellule B5 augmentée d'une unité si le tirage au sort obtenu par la commande ALEA() est strictement inférieur à la valeur de la cellule D5, et d'y marquer la valeur de la cellule B5 si la condition n'est pas réalisée.

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Dans la cellule D5 on écrira $\boxed{\text{=B5/(B5+C5)}}$ pour bien-sûr calculer la proportion de boules blanches dans l'urne après le premier tirage.

2. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Au départ, l'urne contient 1 boule blanche et 1 boule noire donc, après le premier tirage, l'urne peut contenir 1 ou 2 boules blanches avec les probabilités
   - $P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$,
   - $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ L'arbre ci-dessous permet de calculer les lois de X_2 et X_3.

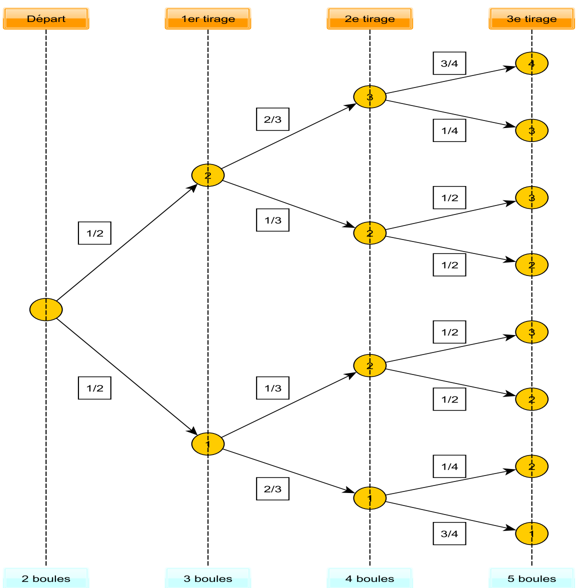

FIGURE 1 – Arbre des choix

$\boxed{\text{1pt}}$ On lit
- $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$,
- $P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$,
- $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$\boxed{\text{1pt}}$ On a également
- $P(X_3 = 4) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$,

- $P(X_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$,
- $P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$,
- $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

(c) $\boxed{\text{1pt}}$ Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, on a

$$\{X_n = k\} = \{X_n = k\} \cap (\{X_{n-1} = k-1\} \cup \{X_{n-1} = k\}),$$

les événements $\{X_{n-1} = k-1\}$ et $\{X_{n-1} = k\}$ formant une partition de l'univers des événements possibles au $(n-1)$-ième tirage si $\{X_n = k\}$ a lieu. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(\{X_n = k\}) &= P(\{X_n = k\} \cap (\{X_{n-1} = k-1\} \cup \{X_{n-1} = k\})) \\ &= P((\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k-1\}) \cup (\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k\})) \\ &= P(\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k-1\}) + P(\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k\}) \end{aligned}$$

car les événements $\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k-1\}$ et $\{X_n = k\} \cap \{X_{n-1} = k\}$ sont disjoints. On utilise ensuite la définition de la probabilité conditionnelle soit $P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$ et on obtient

$$P(\{X_n = k\}) = P(\{X_n = k\}/\{X_{n-1} = k-1\})P(\{X_{n-1} = k-1\}) + P(\{X_n = k\}/\{X_{n-1} = k\})P(\{X_{n-1} = k\}) \quad (1)$$

c'est-à-dire le résultat demandé.

(d) $\boxed{\text{2pts}}$ Montrons dans un premier temps, par récurrence sur n, que

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}, \ \forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

(il restera ensuite à traiter le cas $k = n+1$).

- La relation est vraie au rang $n = 1$. En effet, $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.
- Supposons que la relation $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie au rang $n-1$. Par conséquent,
  $$P(X_{n-1} = k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots n-1\} \qquad (\mathcal{P}_{n-1}).$$
  - Le nombre $P(X_n = k/X_{n-1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant $n+1$ boules dont exactement k sont blanches. Donc :
  $$P(X_n = k/X_{n-1} = k) = \frac{n+1-k}{n+1}.$$
  - Le nombre $P(X_n = k/X_{n-1} = k-1)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant $n+1$ boules dont exactement $k-1$ sont blanches. Donc :
  $$P(X_n = k/X_{n-1} = k-1) = \frac{k-1}{n+1}.$$

  Par conséquent, pour tout k vérifiant $2 \leq k \leq n$, on a grâce à (1) et $(\mathcal{P}_{n-1})$:
  $$P(X_n = k) = \left(\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)\frac{1}{n} = \frac{k-1+n+1-k}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$
  ce qui prouve l'hérédité à savoir que $(\mathcal{P}_{n-1}) \Rightarrow (\mathcal{P}_n)$. La relation $(\mathcal{P}_n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que la relation précédente est également vraie pour $k = n+1$ (ce qui finira de prouver notre résultat). On doit travailler ce cas à part car (1) n'est vraie que pour $2 \leq k \leq n$. On souhaite donc démontrer par récurrence sur n que

$$P(X_n = n+1) = \frac{1}{n+1}, \qquad (\mathcal{Q}_n)$$

- La relation est vraie au rang $n = 1$. En effet, $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.
- Supposons que la relation $(\mathcal{Q}_n)$ soit vraie au rang $n-1$. Par conséquent,
  $$P(X_{n-1} = n) = \frac{1}{n} \qquad (\mathcal{Q}_{n-1}).$$
  On a ensuite
  $$\begin{aligned} P(X_n = n+1) &= P(\{X_n = n+1\} \cap (\{X_{n-1} = n\} \cup \{X_{n-1} = n-1\}) \\ &= P((\{X_n = n+1\} \cap \{X_{n-1} = n\}) \cup (\{X_n = n+1\} \cap \{X_{n-1} = n-1\})) \\ &= P(\{X_n = n+1\} \cap \{X_{n-1} = n\}) + P(\{X_n = n+1\} \cap \{X_{n-1} = n-1\}) \\ &= P(\{X_n = n+1\}/\{X_{n-1} = n\})P(\{X_{n-1} = n\}) + P(\emptyset) \end{aligned}$$

car les deux événements $\{X_n = n+1\}$ et $\{X_{n-1} = n-1\}$ sont incompatibles. En effet, si on dispose d'une urne dans laquelle il y a n boules dont $n-1$ boules sont blanches, il est impossible au tirage suivant d'avoir $n+1$ boules blanches. Comme $P(\{X_n = n+1\}/\{X_{n-1} = n\})$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant $n+1$ boules dont exactement n sont blanches, on a

$$P(X_n = n+1) = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n+1}$$

d'après l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{Q}_{n-1})$. Par conséquent, on a prouvé l'hérédité à savoir que $(\mathcal{Q}_{n-1}) \Rightarrow (\mathcal{Q}_n)$. La relation $(\mathcal{Q}_n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$(\mathcal{P}_n)$ et $(\mathcal{Q}_n)$ étant vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien démontré notre résultat.

(e) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Dire que $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ quel que soit k revient à dire que tous les événements $\{X_n = k\}$ sont équiprobables. Après le k-ième tirage, il y a donc autant de chances d'avoir k boules blanches dans l'urne que k' où k et k' sont deux entiers compris entre 1 et $n+1$. On dit que la loi X_n est équirépartie.

(f) i. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Observons l'arbre de la figure 1. Obtenir une boule blanche au 3-ième tirage c'est au choix :

- obtenir 4 blanches après le 3-ième tirage sachant qu'on en avait 3 avant (événement A de probabilité $P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$),
- obtenir 3 blanches après le 3-ième tirage sachant qu'on en avait 2 avant (événement B de probabilité $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$),
- obtenir 2 blanches après le 3-ième tirage sachant qu'on en avait 1 avant (événement C de probabilité $P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$).

Les 3 événements A,B,C sont disjoints donc

$$P(B_3) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

ii. $\boxed{\text{1pt}}$ Tirer une boule blanche au n-ième tirage, c'est savoir qu'après ce n-ième tirage il y a une boule blanche de plus dans l'urne. Donc B_n est la réunion disjointe des événements $B_{n,k}$: "Après le n-ième tirage on a une boule blanche de plus qu'après le $(n-1)$-ième tirage qui impliquait k boules blanches". Autrement dit,

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k}$$

où les $B_{n,k} = \{X_n = k+1\} \cap \{X_{n-1} = k\}$ sont disjoints deux à deux. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(\bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{X_n = k+1\} \cap \{X_{n-1} = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(\{X_n = k+1\}/\{X_{n-1} = k\}) P(\{X_{n-1} = k\}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\{X_n = k+1\}/\{X_{n-1} = k\}) \end{aligned}$$

d'après le résultat de la question 2.(d).

iii. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $n \geq 2$. Le nombre $P(X_n = k+1/X_{n-1} = k)$ $(1 \leq k \leq n)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant $n+1$ boules dont exactement k sont blanches. La probabilité d'obtenir 1 boule blanche au n-ième tirage est donc égale à

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\{X_n = k+1\}/\{X_{n-1} = k\}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{5pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ La proposition est fausse. Il suffit pour cela de considérer deux événements A et B disjoints, i.e. tels que $P(A \cap B) = 0$. On a alors $P(B/A) = P(A/B) = 0$. Considérons l'exemple d'un lancer de dé, l'événement A pourrait être "le numéro est inférieur à 2" et l'événement B son contraire.
2. $\boxed{\text{2pts}}$ La proposition est fausse. En effet, l'événement "X=1" correspond au fait que la première clé essayée est la bonne. On a donc $P(X = 1) = \dfrac{1}{10} = 0,1$. L'événement "X=2" correspond au fait que la première clé essayée est mauvaise et que la seconde est la bonne. On a donc $P(X = 2) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10}$. L'événement "X=3" correspond au fait que les deux premières clés essayées sont mauvaises et que la troisième est la bonne. On a donc $P(X = 3) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{10}$.
   Or, dans le cas d'une loi binomiale de paramètres n et p, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et donc
   $$\frac{P(X=1)}{P(X=2)} = \frac{np(1-p)^{n-1}}{\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{2(1-p)}{p(n-1)}$$
   $$\frac{P(X=2)}{P(X=3)} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}p^3(1-p)^{n-3}} = \frac{3(1-p)}{p(n-2)}.$$
   Ainsi, on aurait $P(X = 1) = P(X = 2) \Leftrightarrow 2 = p(n + 1)$ et $P(X = 2) = P(X = 3) \Leftrightarrow 3 = p(n + 1)$, ce qui est clairement impossible!
3. $\boxed{\text{1pt}}$ La proposition est vraie. En effet, on a
   $$P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
   qui est équivalent au fait que A et B sont indépendants.
4. $\boxed{\text{1pt}}$ La proposition est fausse car $E(Y) = -0,05 \neq 0$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

1. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Étant dans une situation d'équiprobabilité, on sait que :
   $$P(X) = 0,15,\ P(Y) = 0,55,\ P(Z) = 0,3,\ P_X(D) = 0,05,\ P_Y(D) = 0,03 \text{ et } P_Z(D) = 0,02.$$
   La probabilité cherchée est $P(X \cap D)$ et comme $P(X) \neq 0$, on a :
   $$P(X \cap D) = P_X(D)P(X) = 0,05 \times 0,15 = 0,0075.$$
   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ Les événements X, Y et Z formant une partition de l'univers de tous les tirages possibles, on a donc :
   $$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap (X \cup Y \cup Z)) = P((D \cap X) \cup (D \cap Y) \cup (D \cap Z)) \\ &= P(D \cap X) + P(D \cap Y) + P(D \cap Z) \\ &= P_X(D)P(X) + P_Y(D)P(Y) + P_Z(D)P(Z) \\ &= 0,05 \times 0,15 + 0,03 \times 0,55 + 0,02 \times 0,3 = 0,03. \end{aligned}$$
   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Les événements X et D sont indépendants si et seulement si on a $P(X \cap D) = P(X) \times P(D)$. Or, $P(X \cap D) = 0,0075$ et $P(X) \times P(D) = 0,15 \times 0,03 = 0,0045$. Ainsi, les deux événements "le composant est de type X" et "le composant est défectueux" ne sont pas indépendants.
   (d) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Nous cherchons $P_D(Z)$ qui vaut :
   $$P_D(Z) = \frac{P(D \cap Z)}{P(D)} = \frac{P_Z(D) \times P(Z)}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,30}{0,03} = 0,2.$$
   Donc, sachant que le composant prélevé est défectueux, la probabilité qu'il soit de type Z vaut $0,2$.

2. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ En procédant comme dans la question précédente, on obtient $P_D(X) = 0,25$ et $P_D(Y) = 0,55$, ce qui signifie que dans la population des composants défectueux, 25% sont de type X, 55% sont de type Y et 20% sont de type Z. Si on note S_D la variable aléatoire "surcoût" définie sur la population des composants défectueux, son espérance vaut alors

$$E(S_D) = 2 \times 0,25 + 3 \times 0,55 + 5 \times 0,20 = 3,15.$$

Ainsi le surcoût moyen de remplacement d'un composant défectueux est de 3,15€.

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Puisque dans la population des composants, défectueux ou non, la proportion de composants défectueux est de 3%, puisqu'un composant non défectueux n'occasionne pas de surcoût alors qu'un composant défectueux en occasionne un de 3,15€, alors le surcoût moyen occasionné par la présence de composants défectueux vaut $0 \times 0,97 + 3,15 \times 0,03 = 0,0945$. Ainsi, si on répercute ce coût sur l'ensemble des composants (défectueux ou non), le surcoût moyen occasionné par la présence de composants défectueux dans le stock s'élève à environ 0,09€.

3. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ L'événement "les quatre composants prélevés sont d'un même type" admet une partition en les événements suivants :

- T_X : "les quatre composants sont de type X",
- T_Y : "les quatre composants sont de type Y",
- T_Z : "les quatre composants sont de type Z".

On cherche donc $P(T_X) + P(T_Y) + P(T_Z)$. Or, par indépendance des tirages (puisqu'on peut assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 4 composants), on a :

$$P(T_X) = P(X)^4,\ P(T_Y) = P(Y)^4,\ P(T_Z) = P(Z)^4.$$

On en déduit alors que $P(T_X) + P(T_Y) + P(T_Z) = 0,1001125$. Ainsi, la probabilité que les 4 composants prélevés soient d'un même type est de 0,1 à 0,001 près.

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Puisqu'on peut assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 4 composants, les tirages successifs sont donc indépendants. Chaque tirage d'un composant est donc une épreuve de Bernoulli à deux issues D et $\overline{D}$, avec $P(D) = p$ et $P(\overline{D}) = 1 - p$. La variable aléatoire N suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1-p)$ et donc pour k entier entre 0 et 4, on a

$$P(N = k) = \binom{4}{k} (1-p)^k p^{4-k}.$$

On en déduit que

$$P(N \geq 3) = P(N = 3) + P(N = 4) = 4(1-p)^3 p + (1-p)^4.$$

On obtient ainsi qu'à 0,001 près, la probabilité qu'au moins 3 des 4 composants prélevés ne soient pas défectueux vaut 0,995.