Université du Littoral Côte d'Opale **2010-1011**
L3 Informatique
Probabilités

Devoir Surveillé 1
durée : 1 heure
Sans documents, ni calculatrice

CORRECTION

Questions de cours : On considère un univers Ω rendant compte d'une expérience aléatoire et une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Soient A et B deux événements de Ω. On note B l'événement contraire de B.

1. Dans le cas où A et B sont incompatibles, déterminer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(A \cup B)$.
2. Dans le cas où A et B sont indépendants, déterminer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Supposons que A et B sont indépendants, démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Correction :

1. A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Donc,
   - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
   - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
2. A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
3. Supposons que A et B sont indépendants, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
   Montrons que
   $$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$
   Notons dans un premier temps que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. Par conséquent, on a
   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}).$$
   D'où
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad \text{d'après l'hypothèse} \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}). \end{aligned}$$

Exercice 1
Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. On fait trois tirages avec remise et on note, pour chaque tirage, la couleur de la boule piochée (b pour blanc et r pour rouge).

1. Donner un univers Ω rendant compte de cette expérience aléatoire.
2. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note B_i l'événement : « la boule piochée au i-ième tirage est blanche ».
   Exprimer les événements suivants en fonction des événements B_1, B_2, B_3 et de leurs événements contraires $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$ et $\overline{B_3}$.
   A : « Les trois boules piochées sont blanches »,
   B : « La première boule piochée est blanche »,
   C : « Exactement deux des trois boules piochées sont blanches »,
   D : « L'une au plus des trois boules piochées est blanche »,
   E : « L'une au moins des trois boules piochées est blanche ».
3. Décrire chacun des événements A, B, C, D ci-dessus comme un sous-ensemble de Ω en citant ses éléments.

4. On suppose qu'il y a autant de boules blanches que de boules rouges.
   (a) Est-il judicieux de définir sur Ω une probabilité $\mathbb{P}$ telle que le modèle soit équiprobable ?
   (b) Déterminer la probabilité des événements A, B, C, D ci-dessus.
5. On suppose qu'il y a deux fois plus de boules blanches que de boules rouges.
   Est-il judicieux de définir sur Ω une probabilité $\mathbb{P}$ telle que le modèle soit équiprobable ?

Correction :

1. On peut décrire l'univers Ω rendant compte de l'expérience aléatoire de la manière suivante :
$$\Omega = \{r, b\}^3 = \{(b, b, b), (b, b, r), (b, r, b), (b, r, r), (r, b, b), (r, b, r), (r, r, b), (r, r, r)\}.$$
2.
   - $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$,
   - $B = B_1$,
   - $C = (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)$,
   - $D = (B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$,
   - $E = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.
3.
   - $A = \{(b, b, b)\}$,
   - $B = \{(b, b, b), (b, b, r), (b, r, b), (b, r, r)\}$,
   - $C = \{(b, b, r), (b, r, b), (r, b, b)\}$,
   - $D = \{(b, r, r), (r, b, r), (r, r, b), (r, r, r)\}$,
   - $E = \{(b, b, b), (b, r, b), (b, b, r), (r, b, b), (r, r, b), (r, b, r), (b, r, r)\}$.
4. (a) Oui dans la mesure où chacune des boules est indiscernable au toucher et où il y a autant de boules blanches que de boules rouges.
   (b) Le modèle étant équiprobable, on a pour chaque événement X,
   $$\mathbb{P}(X) = \frac{Card(X)}{Card(\Omega)} \text{ où } Card(\Omega) = 2^3 = 8.$$
   Par conséquent,
   - $\mathbb{P}(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$,
   - $\mathbb{P}(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4}{8}$,
   - $\mathbb{P}(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$,
   - $\mathbb{P}(D) = \dfrac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4}{8}$.
5. Non puisqu'il y a plus de chances de tirer une boule blanche qu'une boule rouge.

Exercice 2

On considère trois enfants : Alix, Basile et Chloé, choisis au hasard parmi ceux nés en 2003 (une année non bissextile, c'est-à-dire une année de 365 jours). Pour chacun d'eux, on note son jour de naissance.

1. Combien cette expérience aléatoire compte-t-elle de résultats possibles ?
2. Est-il cohérent de définir une probabilité $\mathbb{P}$ de sorte que tous les résultats soient équiprobables ?
3. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (*On pourra donner le résultat sous la forme d'une fraction.*)
   A : « Les trois enfants sont nés le 1^{er} janvier »,
   B : « Les trois enfants sont nés le même jour »,
   C : « Les trois enfants sont nés en janvier » (*Rappel : le mois de janvier compte 31 jours*),
   D : « Alix est né le 1^{er} janvier »,
   E : « Alix et Basile sont nés le 1er janvier et Chloé est née un autre jour »,
   F : « Alix et Basile sont nés le même jour et Chloé est née un autre jour »,
   G : « Les trois enfants sont nés trois jours différents »,
   H : « Au moins deux des enfants sont nés le même jour ».

<u>*Correction*</u> :

1. On peut assimiler l'expérience à un tirage successif avec remise donc si Ω est l'univers rendant compte de l'expérience aléatoire, on aura $Card(\Omega) = 365^3$.
2. Oui car chaque enfant ayant la même probabilité d'être né un jour quelconque de l'année, chacun des triplets de Ω aura la même probabilité d'être sélectionné.

   Ainsi, pour tout événement X, on pourra utiliser la formule
   $$\mathbb{P}(X) = \frac{Card(X)}{Card(\Omega)}.$$
3. On a donc
   - $\mathbb{P}(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1 \times 1 \times 1}{(365)^3} = \dfrac{1}{(365)^3}$,
   - $\mathbb{P}(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{365 \times 1 \times 1}{(365)^3} = \dfrac{1}{(365)^2}$,
   - $\mathbb{P}(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{31 \times 31 \times 31}{(365)^3} = \left(\dfrac{31}{365}\right)^3$,
   - $\mathbb{P}(D) = \dfrac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1 \times 365 \times 365}{(365)^3} = \dfrac{1}{365}$,
   - $\mathbb{P}(E) = \dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1 \times 1 \times 364}{(365)^3}$,
   - $\mathbb{P}(F) = \dfrac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \dfrac{365 \times 1 \times 364}{(365)^3} = \dfrac{364}{(365)^2}$,
   - $\mathbb{P}(G) = \dfrac{Card(G)}{Card(\Omega)} = \dfrac{365 \times 364 \times 363}{(365)^3} = \dfrac{364 \times 363}{(365)^2}$,
   - Remarquons que $H = \overline{G}$. Par conséquent, on a
   $$\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(G) = 1 - \frac{364 \times 363}{(365)^2}.$$