

Mesures et analyses statistiques de données - Probabilités

Juin 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 1h10

Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les 2 exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction* : (9 points)

Partie A.

1. 0,5pt Soit $T = \frac{X - 500}{0,1}$. La variable T suit alors la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

1,5pt On a par conséquent

$$p(499,8 \leq X \leq 500,2) = p(-2 \leq T \leq 2) = 2\pi(2) - 1 \simeq 0,9544.$$

2. 1,5pt Comme

$$p(500 - h \leq X \leq 500 + h) = p(-10h \leq T \leq 10h) = 2\pi(10h) - 1 = 0,8,$$

0,5pt on obtient aisément $10h \simeq 1,28$, d'où $h \simeq 0,128$.

Partie B.

1. 1,5pt On considère 50 tirages avec remise, indépendants, de probabilité de succès 0,5. Par conséquent, Y suit la loi $\mathcal{B}(50; 0,05)$.

2. (a) 1,5pt $p(Y = 0) = \binom{50}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{50} \simeq 0,077.$

(b) 2pts $p(Y \geq 3) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) - p(Y = 2) = 1 - 0,95^{50} - 50 \times 0,05 \times 0,95^{49} - 1225 \times 0,05^2 \times 0,95^{48} \simeq 0,459.$

Exercice 2 *Correction* : (11 points)

Partie A.

1. 0,5pt + 1,5pt On trouve $m = 39,86 \simeq 39,9$ et $s \simeq 2,6$.

2. La variable L suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 1,6)$. La théorie de l'échantillonnage nous dit alors que la variable X qui associe à chaque échantillon de taille n la moyenne des longueurs des plaquettes de l'échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu; \frac{1,6}{\sqrt{n}}\right)$ (si $n > 30$). Donc ici, avec $n = 100$, la variable X suit

la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0,16)$, et la variable T définie par $T = \frac{\bar{X} - \mu}{0,16}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

- (a) 0,5pt (Bonus) Comme estimation ponctuelle de μ , on prend la moyenne m de l'échantillon. Soit $\mu = 39,9$.

- (b) 2,5pts (Bonus) On veut un intervalle de confiance à 95%, centré sur μ , de la variable X . Sachant que $p(-1,96 \leq T \leq 1,96) = 0,95$ puisque T suit la loi normale centrée réduite, il vient

$$\begin{aligned} 0,95 &= p\left(-1,96 \leq \frac{\bar{X} - 39,9}{0,16}\right) \\ &= p(-1,96 \times 0,16 + 39,9 \leq \bar{X} \leq 1,96 \times 0,16 + 39,9) \\ &= p(39,5864 \leq \bar{X} \leq 40,2136) \\ &\simeq p(39,6 \leq \bar{X} \leq 40,2). \end{aligned}$$

D'où l'intervalle de confiance à 95% cherché : $[39,6; 40,2]$.

Partie B.

3. (a) 2pts On suppose que L suit la loi $\mathcal{N}(40; 1, 6)$ et que ℓ suit la loi $\mathcal{N}(25; 1, 2)$. Donc les variables T et t , définies respectivement par

$$T = \frac{L - 40}{1,6} \text{ et } t = \frac{\ell - 25}{1,2}$$

suivent la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} p(37 \leq L \leq 43) &= p\left(\frac{37 - 40}{1,6} \leq \frac{L - 40}{1,6} \leq \frac{43 - 40}{1,6}\right) \\ &= p(-1,875 \leq T \leq 1,875) \\ &= 2\pi(1,875) - 1 \text{ vu la parité de la loi normale centrée réduite.} \end{aligned}$$

Comme $\pi(1,875)$ n'est pas dans le formulaire, on fait une interpolation affine, et on prend comme valeur approchée

$$\pi(1,875) \simeq \frac{\pi(1,87) + \pi(1,88)}{2} \simeq 0,9696.$$

On trouve finalement $p(37 \leq L \leq 43) = 0,9392 \simeq 0,94$.

- (b) 2pts De la même façon, on a

$$\begin{aligned} p(22 \leq \ell \leq 28) &= p\left(\frac{22 - 25}{1,2} \leq \frac{\ell - 25}{1,2} \leq \frac{28 - 25}{1,2}\right) \\ &= p(-2,5 \leq t \leq 2,5) \\ &= 2\pi(2,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9938 - 1 = 0,9876 \end{aligned}$$

soit $p(22 \leq \ell \leq 28) \simeq 0,99$.

4. 1pt Si on nomme A l'événement : “la longueur L vérifie $37 \leq L \leq 43$ ”, et B l'événement : “la largeur ℓ vérifie $22 \leq \ell \leq 25$ ”, alors il est clair que l'on a $p(A) = 0,95$ et $p(B) = 0,99$, vu les questions précédentes. Une plaquette est acceptée si l'événement $A \cap B$ est réalisé. Or, les événements A et B étant indépendants, on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \simeq 0,9275$. La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée est donc $p \simeq 0,93$.

Partie C.

5. 1,5pt On tire 100 plaquettes dans les mêmes conditions et avec remise. Tous les tirages sont indépendants, et la seule issue qui nous intéresse est de savoir si la plaquette est rejetée ou non, la probabilité qu'une plaquette soit rejetée étant de $1 - 0,93 = 0,07$. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli et la variable X égale au nombre de plaquettes rejetées après 100 tirages suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,07)$.

0,5pt Son espérance est $E(X) = 100 \times 0,07$, soit $E(X) = 7$.

6. 0,5pt Si on approxime cette loi par une loi de Poisson, on conserve l'espérance, donc le paramètre est $\lambda = 7$.

1,5pt On aura alors

$$p(X < 10) = \sum_{i=0}^{i=9} p(X = i) \simeq 0,829.$$

ANNEXE A - Probabilités individuelles de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X = k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

$k \backslash \lambda$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0492	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1454	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2132	0,2240	0,2158	0,1954	0,1898	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002
16									0,0001

ANNEXE B - Probabilités individuelles et cumulées de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X = k\}) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $F(k) = \sum_{l=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!}$:

λ	1		2		3		4		5	
k	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$
0	0,3679	0,3679	0,1353	0,1353	0,0498	0,0498	0,0183	0,0183	0,0067	0,0067
1	0,3679	0,7358	0,2707	0,4060	0,1494	0,1991	0,0733	0,0916	0,0337	0,0404
2	0,1839	0,9197	0,2707	0,6767	0,2240	0,4232	0,1465	0,2381	0,0842	0,1247
3	0,0613	0,9810	0,1804	0,8571	0,2240	0,6472	0,1954	0,4335	0,1404	0,2650
4	0,0153	0,9963	0,0902	0,9473	0,1680	0,8152	0,1954	0,6288	0,1755	0,4405
5	0,0031	0,9994	0,0361	0,9834	0,1008	0,9161	0,1563	0,7851	0,1755	0,6160
6	0,0005	0,9999	0,0120	0,9955	0,0504	0,9665	0,1042	0,8893	0,1462	0,7622
7	0,0001	1,0000	0,0034	0,9989	0,0216	0,9881	0,0595	0,9489	0,1044	0,8666
8			0,0009	0,9998	0,0081	0,9962	0,0298	0,9786	0,0653	0,9319
9			0,0002	1,0000	0,0027	0,9989	0,0132	0,9919	0,0363	0,9682
10					0,0008	0,9997	0,0053	0,9972	0,0181	0,9863
11					0,0002	0,9999	0,0019	0,9991	0,0082	0,9945
12					0,0001	1,0000	0,0006	0,9997	0,0036	0,9980
13							0,0002	0,9999	0,0013	0,9993
14							0,0001	1,0000	0,0005	0,9998
15									0,0002	0,9999
16									0,0001	1,0000

λ	6		7		8		9		10	
k	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$
0	0,0025	0,0025	0,0009	0,0009	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001		
1	0,0149	0,0174	0,0064	0,0073	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0005	0,0005
2	0,0446	0,0620	0,0223	0,0296	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0023	0,0028
3	0,0892	0,1512	0,0521	0,0818	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0076	0,0104
4	0,1339	0,2851	0,0912	0,1730	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0189	0,0293
5	0,1606	0,4457	0,1277	0,3007	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0378	0,0671
6	0,1606	0,6063	0,1490	0,4497	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,0631	0,1302
7	0,1377	0,7440	0,1490	0,5987	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,0901	0,2203
8	0,1033	0,8472	0,1304	0,7291	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1126	0,3329
9	0,0688	0,9161	0,1014	0,8305	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1251	0,4580
10	0,0413	0,9574	0,0710	0,9015	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,1251	0,5381
11	0,0225	0,9799	0,0452	0,9466	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,1137	0,6968
12	0,0113	0,9912	0,0264	0,9730	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0948	0,7916
13	0,0052	0,9964	0,0142	0,9872	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0729	0,8645
14	0,0022	0,9986	0,0071	0,9943	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0521	0,9166
15	0,0009	0,9995	0,0033	0,9976	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0347	0,9513
16	0,0003	0,9998	0,0014	0,9990	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0217	0,9730
17	0,0001	1,0000	0,0006	0,9996	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0128	0,9857
18			0,0002	0,9999	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0071	0,9928
19			0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0037	0,9965
20					0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0019	0,9984
21					0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0009	0,9993
22							0,0001	0,9999	0,0004	0,9997
23								1,0000	0,0002	0,9999
24									0,0001	1,0000

ANNEXE C - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998