Université du Littoral Côte d'Opale — **2010-2011**
L3 Informatique — **Première session**
Probabilités

Examen
durée : 2 heures
Sans documents
Avec calculatrice de l'université

Exercice 1
Un tiroir contient 3 paires de chaussettes toutes différentes. Mais les paires ne sont pas formées c'est-à-dire que les 6 chaussettes sont mélangées dans le tiroir. Les chaussettes sont désignées par a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 de sorte que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, les chaussettes a_i et b_i forment une paire.

1. On choisit au hasard simultanément 2 chaussettes. On note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles.
   (a) Donner le cardinal de Ω.
   (b) Est-il cohérent de définir sur Ω une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous les éléments de Ω sont équiprobables ?
   (c) Décrire l'évènement A suivant comme un sous-ensemble de Ω en citant ses éléments :
   A : « Les deux chaussettes choisies forment une paire ».
   (d) Déterminer la probabilité de l'évènement A ci-dessus puis celle de l'évènement B : « Les deux chaussettes choisies ne forment pas une paire ».
2. On choisit au hasard simultanément 3 chaussettes. On note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles.
   (a) Donner le cardinal de Ω.
   (b) Est-il cohérent de définir sur Ω une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous les éléments de Ω sont équiprobables ?
   (c) Décrire l'évènement suivant comme un sous-ensemble de Ω en citant ses éléments :
   A : « Parmi les 3 chaussettes choisies, il n'y a pas de paire ».
   (d) Déterminer la probabilité de l'évènement A ci-dessus.
3. On choisit au hasard simultanément 4 chaussettes. On note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles.
   (a) Donner le cardinal de Ω.
   (b) Est-il cohérent de définir sur Ω une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous les éléments de Ω sont équiprobables ?
   (c) Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   A : « Parmi les 4 chaussettes choisies, il n'y a pas de paire »,
   B : « Parmi les 4 chaussettes choisies, il y a deux paires ».
   C : « Parmi les 4 chaussettes choisies, il y a une et une seule paire »,
   D : « Parmi les 4 chaussettes choisies, il y a au moins une paire »,
   E : « Parmi les 4 chaussettes choisies, il y a moins de deux paires ».

Exercice 2

Le service de dépannage d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les interventions ont lieu indépendamment les unes des autres et que pour chaque appel, la probabilité que l'intervention ait lieu avec un retard est de $0,25$.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. Soit X le nombre de fois où ce client a dû subir un retard. Déterminer la loi de X.
2. Le service après-vente enregistre une succession d'appels jusqu'à obtenir deux interventions ayant lieu avec retard. On note R_1 la variable aléatoire donnant le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard et R_2 la variable aléatoire donnant le rang du deuxième appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard.
   (a) Déterminer la loi de R_1.
   (b) Décrire, à l'aide de R_1, les événements suivants puis en calculer la probabilité.
   A : « Le premier retard a eu lieu lors de la troisième intervention »
   B : « Aucun retard n'a eu lieu lors des 10 premières interventions. »
   (c) Décrire, à l'aide de R_1 et R_2, les événements suivants puis en calculer la probabilité.
   C : « Le premier retard a eu lieu lors de la troisième intervention et le deuxième retard a lieu lors de la cinquième intervention.»
   D : « Le deuxième retard lieu lors de la troisième intervention. »
   E : « Le deuxième retard lieu lors de la quatrième intervention. »
   (d) Déterminer la loi de R_2.

Exercice 3

Un contrôle effectué depuis plusieurs mois sur le diamètre des pièces usinées par une machine indique que 8% d'entre elles sont défectueuses. On prélève 1000 pièces de la production et on vérifie leur diamètre. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses parmi les 1000 choisies .

1. Donner la loi de X, en précisant le ou les paramètres .
2. Par quelle loi, dont on précisera les paramètres, peut-on approcher la loi de X ?
3. En utilisant l'approximation proposée ci-dessus, calculer
   (a) la probabilité qu'au plus 90 pièces soient défectueuses.
   (b) la probabilité qu'au plus 70 pièces soient défectueuses.
   (c) la probabilité que plus 65 pièces soient défectueuses.
   (d) la probabilité que plus de 65 et au plus 95 pièces soient défectueuses.
   (e) le plus petit entier N tel que la probabilité qu'il y ait au plus N pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 0,95.
   (f) le plus petit entier M tel que la probabilité qu'il y ait plus de $80 - M$ et au plus $80 + M$ pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 0,95.

Questions de cours :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$.

1. Donner la densité de X.
2. Par un calcul, déterminer la fonction de répartition de F
3. Démontrer que X admet une espérance et démontrer que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
4. Démontrer que X admet une variance et démontrer que $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Lois usuelles discrètes

Nom de la loi	Paramètres	Notation	Loi de X	$\mathbf{E(X)}$	$\mathbf{V(X)}$
Uniforme	$n \in \mathbf{N}^*$	$\mathcal{U}(n)$	Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$
de Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(n, p)$	Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{G}(p)$	Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique	$N \in \mathbf{N}^*$, $n \in \{0, \cdots, N\}$, et $p \in]0, 1[$ tel que $Np \in \mathbf{N}$	$\mathcal{H}(N, n, p)$	Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$
de Poisson	$\lambda \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathcal{P}(\lambda)$	Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Lois usuelles continues

Nom de la loi	Paramètres	Notation	Loi de X	$\mathbf{E}(\mathbf{X})$	$\mathbf{V}(\mathbf{X})$
Uniforme	$a \in \mathbf{R}$ $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$	$\mathcal{U}([a,b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{b+a}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normale	$m \in \mathbf{R}$ $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathcal{N}(m,\sigma)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
Exponentielle	$\lambda \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0,1).

Cette table donne :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{pour} \quad X \sim \mathrm{N}(0,1).$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998