MESURES ET ANALYSES STATISTIQUES DE DONNÉES

Probabilités

Master Génie des Systèmes Industriels, mentions ACCIE et RIM

Université du Littoral - Côte d'Opale, La Citadelle

Laurent SMOCH

(smoch@lmpa.univ-littoral.fr)

Septembre 2012

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 2

La probabilité

2.1 Le vocabulaire

2.1.1 Expérience aléatoire et univers

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont on ne peut prévoir le résultat avec certitude. Une telle expérience est appelée **expérience aléatoire**.
On appelle **univers**, noté Ω, tout ensemble dont les éléments représentent tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. L'ensemble des résultats possibles est connu.

2.1.2 Evénements

Soit Ω un univers correspondant à une certaine expérience aléatoire. Il sera noté généralement

$$\boxed{\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}}$$

Les w_i, éléments de Ω, sont des **éventualités**. Le singleton $\{w_i\}$ est appelé **événement élémentaire**. Une partie de Ω est appelée **événement**, c'est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ (qui on le rappelle, définit l'ensemble des parties de Ω).

Exemple 2.1.1 Dans le cas du "lancer d'un dé à 6 faces ", les éventualités sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$, les événements élémentaires $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$. Les événements sont les parties de Ω, par exemple, l'événement "obtenir un nombre pair " peut s'écrire $A = \{2, 4, 6\}$.

On a également les définitions suivantes : soit A un événement de Ω,

- on dit que A **se réalise** si le résultat obtenu à l'issue de l'expérience aléatoire est un élément de A.
- Soit A un événement de Ω. On appelle **événement contraire de** A (ou **complémentaire**), noté $\bar{A}$, l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit, l'événement $\bar{A}$ se réalise lorsque l'événement A ne se réalise pas.
- Soient A et B deux événements de Ω. On appelle **intersection de** A **et** B le sous-ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B et on le note $A \cap B$. Autrement dit, l'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les événements A et B se réalisent.
- Soient A et B deux événements de Ω. On appelle **réunion de** A **et** B le sous-ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B et on le note $A \cup B$. Autrement dit, l'événement $A \cup B$ se réalise lorsque au moins l'un des événements A et B se réalise.

2.1.3 Propriétés de $\mathcal{P}(\Omega)$

1. $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$, Ω est appelé **événement certain**.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$
   En particulier $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$. L'ensemble vide est appelé **événement impossible**.

3. $\left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{P}(\Omega) \\ B \in \mathcal{P}(\Omega) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega) \\ A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega) \end{array}\right.$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.1.4 Opérations sur les événements

Les opérations sur les ensembles ont une interprétation en matière d'événements.

1. $A \subset B$: la réalisation de A implique celle de B.
2. $A \cup B$ désigne l'événement "A ou B", il se produit si au moins un des événements est réalisé.
3. $A \cap B$ désigne l'événement "A et B", il se produit si A et B sont tous les deux réalisés.
4. Soient deux parties disjointes A et B, c'est-à-dire telles que $A \cap B = \emptyset$. Les événements A et B sont dits **incompatibles**.
5. Soit un système d'événements $A_i, \; i \in I$. Les événements A_i sont dits **globalement incompatibles** si $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.

   Remarque 2.1.1 Si les A_i sont deux à deux incompatibles alors ils sont globalement incompatibles, par contre la *réciproque* est fausse.

   Exemple 2.1.2 Avec 3 événements A_1, A_2 et A_3 :

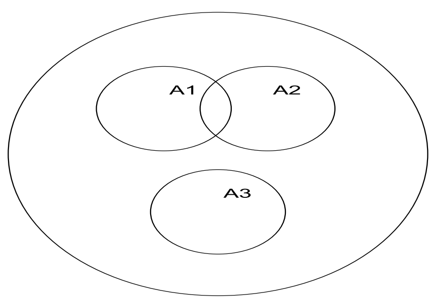

Figure 2.1

   on a donc bien $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ mais $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ce qui illustre la remarque précédente.

2.2 Probabilité

2.2.1 Axiome de probabilité

Soient une expérience aléatoire et Ω l'univers associé, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements. On définit une probabilité comme une application qui à un événement associe un nombre qui mesure les chances de réalisation de cet événement. Mathématiquement parlant, une probabilité est une application

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & p(A) \in [0;1] \end{array}$$

On dit que $p(A)$ est la probabilité de l'événement A. L'application p vérifie les axiomes suivants

1. $p(\Omega) = 1$
2. si $A \cap B = \emptyset$ (les événements sont incompatibles) alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Remarque 2.2.1 Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est **probabilisé** par la définition de la probabilité p. Pour probabiliser $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, il existe une infinité de probabilités possibles. Le choix de la probabilité résulte d'hypothèses faites sur l'épreuve aléatoire.

2.2.2 Conséquences

1. $\boxed{p(\emptyset) = 0}$

   Preuve : On a $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ et $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ donc $p(\emptyset) = p(\emptyset) + p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$. ■

2. $\boxed{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$

   Preuve :
   $$\left.\begin{array}{l} A \cap \overline{A} = \emptyset \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow p(\Omega) = 1 = p(A) + p(\overline{A}).$$ ■

3. $\boxed{A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)}$

   Preuve :
   $$\left.\begin{array}{l} A \cup (B - A) = b \\ A \cap (B - A) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow p(B) = p(A) + p(B - A).$$ Comme $p(B - A) \in \mathbb{R}^+$ on a $p(A) \leq p(B)$. ■

4. $\boxed{A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1}$

   Preuve : $\emptyset \subset A \subset \Omega \Rightarrow p(\emptyset) \leq p(A) \leq p(\Omega)$ donc $0 \leq p(A) \leq 1$. ■

5. $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

   Preuve :
   $$\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup (A/B) \\ B \cap (A/B) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow p(A \cup B) = p(B) + p(A/B)$$ d'après le deuxième axiome de la probabilité,
   $$\left.\begin{array}{l} (A/B) \cup (A \cap B) = A \\ (A/B) \cap (A \cap B) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow p(A) = p(A \cap B) + p(A/B),$$
   $p(A \cup B) - p(B) = p(A/B) = p(A) - p(A \cap B)$ donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. ■

6. $\boxed{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}$

   Preuve : En posant $B \cup C = X$ on obtient $p(A \cup B \cup C) = p(A \cup X) = p(A) + p(X) - p(A \cap X)$ d'après le résultat précédent. Or $p(X) = p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C)$ et $A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Par conséquent, $p(A \cap X) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap A \cap C) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)$. En remplaçant cette expression dans $p(A \cup B \cup C)$ on obtient l'égalité. ■

   Remarque 2.2.2

   – Dans le cas où les événements A, B et C sont incompatibles deux à deux, on obtient
   $$\boxed{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)}$$
   – On peut généraliser cette propriété à n événements incompatibles deux à deux
   $$\boxed{p\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} p(A_i) \text{ avec } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j}$$

2.3 Ensembles probabilisés

2.3.1 Ensembles finis probabilisés

1. Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$ donné par :

$$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

On définit une probabilité de la façon suivante

- $p_i = p(\{w_i\}) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Remarque 2.3.1 Si A est une partie de Ω, $p(A) = \sum_{w_i \in A} p(\{w_i\})$.

2. On dit qu'on a **équiprobabilité sur** Ω si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, autrement dit si

$$p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\}).$$

Remarque 2.3.2 Si on a équiprobabilité sur Ω alors, d'après la définition d'une probabilité, on a

$$p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

et, pour tout événement A,

$$\boxed{p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}$$

où, on le rappelle, Card(A) désigne le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble A.

Remarque 2.3.3 Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé cubique. Supposons que le dé soit équilibré (ou non truqué ou non pipé), dans ce cas, si p_i est la probabilité d'obtenir la face i avec $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.

Soit A l'événement "le numéro de la face supérieure du dé est pair". Alors $p(A) = \frac{3}{6}$ de par l'équiprobabilité des événements élémentaires. En effet, $p(A) = p(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$ car les événements (élémentaires) $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$ sont incompatibles deux à deux.

2.3.2 Ensembles infinis dénombrables probabilisés

Un ensemble Ω est un ensemble **dénombrable infini** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^*$ dans Ω. Il peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots\ldots\}$$

On définit une probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en attribuant à chaque w_i une probabilité $p_i = p(\{w_i\}) \geq 0$ telle que $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} p_i = 1$.

Exemple 2.3.1 On réalise une expérience qui n'a que deux issues possibles (l'échec ou la réussite) jusqu'à ce qu'elle réussisse. On s'intéresse au nombre de réalisations nécessaires à la réussite. Ce nombre est variable, $\Omega = \mathbb{N}^*$ donc Ω est un ensemble infini dénombrable.

- $p_1 = p(\{1\}) = \frac{1}{2}$, la "réussite" apparaît lors de la première réalisation,
- $p_2 = p(\{2\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, la "réussite" apparaît lors de la deuxième réalisation,

$\vdots$

- $p_n = p(\{n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la "réussite" apparaît lors de la n-ième réalisation donc les$(n-1)$ premières réalisations ont donné un "échec"

$\vdots$

Ainsi, $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} p_i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$.

Pour déterminer cette somme, on rappelle la formule

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}.$$

En effet, $\sum_{i=1}^{n} p_i$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

De plus, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} p_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

2.4 Probabilité conditionnelle

2.4.1 Définition

1. Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, A étant un événement de probabilité non nulle, considérons l'application notée p_A telle que

$$\boxed{\begin{array}{rccl} p_A: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & X & \mapsto & p_A(X) = \dfrac{p(A\cap X)}{p(A)} \end{array}}$$

2. L'application p_A est une probabilité. En effet,
   - $p_A(\Omega) = \frac{p(A\cap\Omega)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$
   - Si $X\cap Y = \emptyset$, $p_A(X\cup Y) = \frac{p(A\cap(X\cup Y))}{p(A)}$ mais on peut remarquer que $A\cap(X\cup Y) = (A\cap X)\cup(A\cap Y)$ et $(A\cap X)\cap(A\cap Y) = A\cap X\cap Y = X\cap Y = \emptyset$. Par conséquent,
   $$p_A(X\cup Y) = \frac{p(A\cap X)+p(A\cap Y)}{p(A)} = \frac{p(A\cap X)}{p(A)} + \frac{p(A\cap Y)}{p(A)}.$$
   Finalement, si $X\cap Y = \emptyset$ alors $p_A(X\cup Y) = p_A(X) + p_A(Y)$.
3. $p_A(X) = \frac{p(A\cap X)}{p(A)}$ est encore notée $p(X/A)$ et est appelée **probabilité conditionnelle de X sachant A** ou **probabilité de X sachant A** ou **probabilité de X une fois A réalisé**.

Remarque 2.4.1

– L'application p_A est une probabilité, elle vérifie donc les propriétés de la probabilité, en particulier
  - $p_A(\emptyset) = 0$
  - $p_A(X) + p_A(\overline{X}) = 1$

– Si $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$ alors

$$\boxed{p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = p(B/A) \text{ et } p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(A/B)}$$

Donc

$$\boxed{p(A\cap B) = p(A)\times p(B/A) = p(B)\times p(A/B)}$$

– Pour trois événements A, B et C, on a :

$$p(A)\times p(B/A)\times p(C/A\cap B) = p(A)\times\frac{p(B\cap A)}{p(A)}\times\frac{p(A\cap B\cap C)}{p(A\cap B)}$$

donc

$$\boxed{p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B/A) \times p(C/A \cap B)}$$

2.4.2 Exemple

Un technicien doit régler de toute urgence un problème électrique sur une machine. La partie défaillante étant hors de vue mais pas hors d'atteinte, notre réparateur a la possibilité de déconnecter 3 fusibles noirs (numérotés N_1, N_2, N_3) et 2 fusibles rouges (numérotés R_1, R_2), indiscernables au toucher malheureusement pour lui. Il doit déconnecter deux fusibles rouges successivement pour régler le problème.
On a les éventualités suivantes :

$$(N_1, R_1)\ ;\ (N_1, R_2)\ ;\ (N_2, R_1)\ ;\ (N_2, R_2)\ ;\ (N_3, R_1)\ ;\ (N_3, R_2)\ ;\ (R_1, N_1)\ ;\ (R_2, N_1)\ ;$$
$$(R_1, N_2)\ ;\ (R_2, N_2)\ ;\ (R_1, N_3)\ ;\ (R_2, N_3)\ ;\ (R_1, R_2)\ ;\ (N_1, N_2)\ ;\ (N_1, N_3)\ ;\ (N_2, N_3)\ ;$$
$$(R_2, R_1)\ ;\ (N_2, N_1)\ ;\ (N_3, N_1)\ ;\ (N_3, N_2)$$

On dénombre donc 20 résultats possibles. On peut retrouver ce nombre en utilisant des techniques de dénombrement : notre problème peut être asssimilé à un arrangement d'ordre 2 des 5 fusibles. On en dénombre $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$.

- On considère les événements :
  - A : "déconnecter un fusible rouge au premier essai".
  - B : "déconnecter un fusible rouge au second essai".

  On a $p(A) = \frac{2}{5}$, $p(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $p(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Ainsi, en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{8}{20}} = \frac{1}{4}$.
- Sans utiliser la définition de $p(B/A)$, l'événement A étant réalisé (on a déconnecté un fusible rouge au premier essai) dans les 8 cas suivants
  $$(R_1, N_1)\ ;\ (R_1, N_2)\ ;\ (R_1, N_3)\ ;\ (R_1, R_2)\ ;\ (N_1, R_1)\ ;\ (N_2, R_1)\ ;\ (N_3, R_1)\ ;\ (R_2, R_1),$$
  quelle est la probabilité de B ? $p(B/A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ c'est-à-dire que sur les 8 cas de réalisation de A, 2 cas donnent la réalisation de B, les cas (R_1, R_2) et (R_2, R_1).

2.4.3 Indépendance en probabilité

1. Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on dit que deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si
$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$
2. Propriétés équivalentes : Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$,
   - les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A) = p(A/B) \Leftrightarrow p(B) = p(B/A)$,
   - la réalisation de A n'influence pas B ; de même la réalisation de B n'influence pas A.

   Remarque 2.4.2 On ne confondra pas "indépendance en probabilité" et"événements incompatibles" qui se traduisent respectivement par $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ et $A \cap B = \emptyset$.
3. Généralisation : Trois événements sont dits **globalement indépendants** en probabilité s'ils sont deux à deux indépendants en probabilité c'est-à-dire si
   - $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
   - $p(B \cap B) = p(B)p(C)$
   - $p(A \cap C) = p(A)p(C)$

4. Soient A et B deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
En effet $p(\overline{A} \cap B) = p(B) \times p(\overline{A}/B)$ or $p(\overline{A}/B) = 1 - p(A/B)$ donc $p(\overline{A} \cap B) = p(B)[1 - p(A/B)] = p(B)[1 - p(A)]$ car A et B sont indépendants. Enfin, $p(\overline{A} \cap B) = p(B)p(\overline{A})$ ce qui signifie que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Remarque 2.4.3 Il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 23 Une formation en Master GSI compte 4 garçons et 6 filles en première année, 6 garçons en seconde année. Combien doit-il y avoir de filles de seconde année si l'on veut que “sexe” et “année” soient des facteurs indépendants lors du choix au hasard d'un étudiant ?

2.4.4 La formule de Bayes

1. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé et un système complet d'événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ deux à deux incompatibles ($B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$), on dit que les $(B_i)_{i \in I}$ forment une **partition** de Ω.

   Soit A un événement de probabilité non nulle, on peut alors écrire la formule de Bayes donnant la probabilité pour que B_i se réalise sachant A :

$$\boxed{p(B_i/A) = \frac{p(B_i) \times p(A/B_i)}{\displaystyle\sum_{j \in I} p(B_j) \times p(A/B_j)}}$$

   <u>*Preuve*</u> : $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$. De plus, $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$ pour $i \neq j$. Par conséquent, $p(A) = \sum_{i \in I} p(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} p(B_i) \times p(A/B_i)$. Or on sait que $p(B_i/A)$ peut s'écrire sous la forme $p(B_i/A) = \dfrac{p(A \cap B_i)}{p(A)} = \dfrac{p(B_i) \times p(A/B_i)}{p(A)}$ d'où la formule de Bayes. ■

2. Dans le cas d'un système complet de deux événements B_1 et B_2 ($B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ B_1 \cup B_2 = \Omega$),
   - $p(B_1/A) = \dfrac{p(B_1) \times p(A/B_1)}{p(B_1) \times p(A/B_1) + p(B_2) \times p(A/B_2)}$
   - $p(B_2/A) = \dfrac{p(B_2) \times p(A/B_2)}{p(B_2) \times p(A/B_2) + p(B_1) \times p(A/B_1)}$

3. Dans le cas d'un système complet de trois événements B_1, B_2 et B_3 ($B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_3 = B_1 \cap B_3 = \emptyset,\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$), on a par exemple

$$p(B_1/A) = \frac{p(B_1) \times p(A/B_1)}{p(B_1) \times p(A/B_1) + p(B_2) \times p(A/B_2) + p(B_3) \times p(A/B_3)}.$$

Exercice 24 On suppose que les essais d'un test médical sur une population ont conduit à admettre pour un individu les probabilités suivantes, le test servant à dépister une certaine maladie.

- Probabilité pour qu'un malade ait un test positif (donc probabilité pour que le test soit positif sachant que la personne est malade) : $p(T/M) = 0,95$.
- Probabilité pour qu'un non-malade ait un test négatif (donc probabilité pour que le test soit négatif sachant que la personne est saine) : $p(\overline{T}/\overline{M}) = 0,95$.
- Probabilité pour qu'un individu soit atteint de la maladie $p(M) = 0,01$.

Quelle est la probabilité pour qu'un individu qui a donné lieu à un test positif soit atteint de la maladie ?

2.5 Exercices

Exercice 25 On mesure les longueurs des boulons d'une certaine boîte de 100.
On obtient les résultats suivants :

Longueur **en cm**	$[4; 4,2[$	$[4,2; 4,4[$	$[4,4; 4,6[$	$[4,6; 5[$
Effectifs	17	24	51	8

On tire au hasard un boulon. Calculez les probabilités des événements suivants :

1. Le boulon mesure moins de $4,2$ cm.
2. Le boulon mesure plus de $4,4$ cm.

Un boulon est utilisable si sa longueur est comprise entre $4,2$ et $4,6$ cm.

3. Quelle est la probabilité qu'un boulon soit utilisable ?
4. On achète 50 boîtes de 100 boulons. Combien peut-on espérer de boulons utilisables ?

Exercice 26 Deux ateliers, notés A et B, d'une même entreprise produisent chaque jour respectivement 1000 et 800 puces électroniques d'un même modèle. 2% des pièces produites par l'atelier A et 3% des pièces produites par l'atelier B sont défectueuses.

1. Complétez le tableau suivant qui décrit la production journalière .

	Nombre de puces défectueuses	Nombre de puces non défectueuses	Total
Nombre de puces produites par l'atelier A			
Nombre de puces produites par l'atelier B			
Total			1800

2. Un jour donné, on choisit au hasard une puce parmi les 1800 puces produites par les deux ateliers. On est dans une situation d'équiprobabilité. On considère les événements suivants :
   A : "la puce choisie provient de l'atelier A",
   B : "la puce choisie provient de l'atelier B",
   D : "la puce choisie est défectueuse",
   $\overline{\mathrm{D}}$: "la puce choisie n'est pas défectueuse".
   Déterminez exclusivement à l'aide du tableau précédent les probabilités suivantes :
   (a) $p(D)$, $p(A \cap D)$, $p(A/D)$.
   (b) $p(\overline{D})$, $p(B \cap \overline{D})$, $p(B/\overline{D})$.
3. Vérifiez que $p(A \cap D) = p(A/D) \times p(D)$ et que $p(B \cap \overline{D}) = p(B/\overline{D}) \times p(\overline{D})$.

Exercice 27 Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 3% de pièces défectueuses. Le mécanisme de contrôle des pièces est aléatoire. Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de $0,96$ et si elle est défectueuse elle est refusée avec une probabilité de $0,98$. Calculez les probabilités suivantes :

p_0 : pour qu'une pièce soit mauvaise et acceptée,

p_1 : pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle,
p_2 : pour qu'une pièce soit acceptée,
p_3 : pour qu'une pièce soit mauvaise, sachant qu'elle est acceptée.

Exercice 28 Trois machines A, B et C produisent respectivement 60%, 30% et 10% de la production des pièces d'une entreprise. La machine A (respectivement B et C) produit 2% (respectivement 3% et 4%) d'objets défectueux.

1. On choisit une pièce au hasard à la sortie de l'usine. Calculez la probabilité de l'événement : "La pièce est défectueuse".
2. On choisit une pièce au hasard à la sortie de l'usine et on voit qu'elle est défectueuse. Calculez la probabilité de l'événement : "Cette pièce a été fabriquée par la machine B".

Exercice 29 Monsieur et Madame A ont quatre enfants. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est la même que celle d'une fille. Calculez la probabilité des événements suivants :
A : "Monsieur et Madame A ont quatre filles",
B : "Monsieur et Madame A ont trois filles et un garçon",
C : "Monsieur et Madame A ont deux filles et deux garçons",
D : "Monsieur et Madame A n'ont pas de fille",
E : "Monsieur et Madame A ont au moins une fille",
F : "Monsieur et Madame A ont au moins une fille et un garçon".

Exercice 30 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace de probabilité et soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tels que

$$p(A) = \frac{1}{3}, \quad p(B) = \frac{1}{2}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

Calculez $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cup B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 31 Une urne contient cinq boules, trois rouges, numérotées 1, 2, 3 et deux noires, numérotées 1 et 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : "les deux boules tirées sont de la même couleur " ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement B : "la somme des numéros portés sur chacune des deux boules tirées est égale à 3 " ?
3. Quelle est la probabilité de B sachant que A est réalisé ?

Exercice 32 Une urne A contient 4 boules rouges et 2 boules bleues. Une urne B contient 5 boules rouges et 6 boules bleues et une urne C contient 1 boule rouge et 9 boules bleues. On jette un dé parfait numéroté de 1 à 6.

- Si le résultat est impair, on tire au hasard une boule de A.
- Si le résultat est '2' ou '4', on tire au hasard une boule de B.
- Si le résultat est '6', on tire au hasard une boule de C.

Sachant que la boule tirée est bleue, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne C ?

Exercice 33 Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 3 cartes.

1. Déterminez le nombre de tirages possibles.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   A : "le tirage contient le roi de coeur",
   B : "le tirage contient un roi exactement",
   C : "le tirage contient un coeur exactement",
   D : "le tirage contient deux coeurs dont le roi",
   E : "le tirage contient au moins un coeur" (pensez au complémentaire),

F : “le tirage contient exactement deux coeurs et exactement un roi”.

Exercice 34 On tire 3 boules d’un sac contenant 9 boules : 4 vertes, 3 rouges, 1 blanche et 1 noire

1. successivement avec remise. Calculez la probabilité des événements suivants :
   A : “le tirage contient 3 boules vertes”,
   B : “le tirage ne contient aucune boule rouge”,
   C : “le tirage contient 3 boules blanches”,
   D : “le tirage contient dans cet ordre : 2 boules vertes et 1 boule rouge”,
   E : “le tirage contient 2 vertes et 1 rouge”,
   F : “le tirage contient 1 verte, 1 rouge et 1 noire”.
2. Mêmes questions si le tirage se fait successivement sans remise.
3. Mêmes questions si le tirage se fait simultanément.