CORRECTION Exercices Chapitre 3 - Les variables aléatoires réelles.

Exercice 35 *Correction* :

1. On peut se donner pour cette question et les suivantes le tableau

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$	$p_i \nearrow$
0	$0,10$	0	0	$0,10$
1	$0,16$	$0,16$	$0,16$	$0,26$
2	$0,25$	$0,50$	$1,0$	$0,51$
3	$0,30$	$0,90$	$2,7$	$0,81$
4	$0,13$	$0,52$	$2,08$	$0,94$
5	$0,05$	$0,25$	$1,25$	$0,99$
6	$0,01$	$0,06$	$0,36$	1
Total	1	$2,39$	$7,55$	–

On rappelle que $F(x_i) = p(\{X \leq x_i\})$. En utilisant la dernière colonne du tableau, on a la représentation graphique suivante :

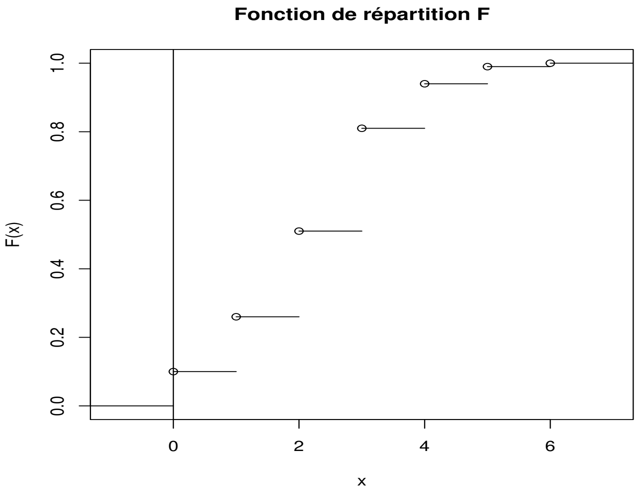

Figure 1 –

2. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ où $p_i = p(\{X = x_i\})$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc $E(X) = 2,39$ (on ne divise pas par n comme c'est le cas pour une moyenne arithmétique car les p_i correspondent ici à des fréquences).
$E(X)$ représente le nombre moyen de pièces vendues dans le cas d'un grand nombre de relevés.
3. On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Or
   - $E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2 = 7,55$
   - $(E(X))^2 = (2,39)^2 = 5,7121$

   Par conséquent, $V(X) = 7,55 - 5,7121 = 1,8379$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 1,3557$.

Exercice 36 *Correction* : Soit Ω l'univers des numéros de porte défini donc par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le jeu n'est pas équiprobable car la probabilité de chacune des portes est différente.

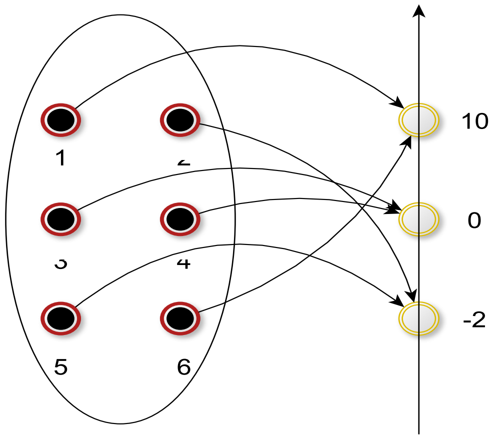

FIGURE 2 –

1. Les valeurs possibles de Y sont 10, 0 et -2.
2. La loi de probabilité de Y revient à associer à chaque gain une probabilité :
   - $p(\{Y=10\}) = p(\{X=1\} \cup \{X=6\}) = p(\{X=1\}) + p(\{X=6\}) = \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{16}$.
     La probabilité de la réunion des événements $X = 1$ et $X = 6$ est égale à la somme des probabilités de ces événements. En effet $X = 1$ et $X = 6$ sont disjoints (la probabilité d'avoir deux sorties en même temps est nulle). On trouve de la même façon :
   - $p(\{Y=0\}) = p(\{X=3\} \cup \{X=4\}) = p(\{X=3\}) + p(\{X=4\}) = \dfrac{10}{32} + \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{8}$,
   - $p(\{Y=-2\}) = p(\{X=2\} \cup \{X=5\}) = p(\{X=2\}) + p(\{X=5\}) = \dfrac{5}{32} + \dfrac{5}{32} = \dfrac{5}{16}$.

   La loi de probabilité de Y est alors définie par :

k	-2	0	10
$p(\{Y=k\})$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

   On vérifie bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} p(\{Y=k\}) = 1$.
3. $E(Y) = -2 \times \dfrac{5}{16} + 0 \times \dfrac{5}{8} + 10 \times \dfrac{1}{16} = 0$ ainsi le jeu est équitable.

Exercice 37 *Correction* : On va déterminer la probabilité de chacun des cas. Tout d'abord

$$\text{Card}(\Omega) = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

donc le nombre de tirages possibles est 70.

- $p(\{X=0\}) = \dfrac{C_4^4}{70} = \dfrac{1}{70}$ (C_4^4 estle nombre de choix de 4 jetons blancs),
- $p(\{X=1\}) = \dfrac{4C_4^3}{70} = \dfrac{16}{70} = \dfrac{8}{35}$ (4 est le nombre de choix pour le jeton noir et C_4^3 est le nombre de choix de 3 jetons blancs),
- $p(\{X=2\}) = \dfrac{C_4^2 \times C_4^2}{70} = \dfrac{36}{70} = \dfrac{18}{35}$,
- $p(\{X=3\}) = \dfrac{C_4^3 \times C_4^1}{70} = \dfrac{16}{70} = \dfrac{8}{35}$,
- $p(\{X=4\}) = \dfrac{C_4^4}{70} = \dfrac{1}{70}$.

On peut vérifier que $\sum_{i=0}^{4} p(\{X = i\}) = 1$.

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi que les valeurs nous permettant de calculer l'espérance et la variance.

i	$p_i = p(\{X = i\})$	ip_i	i^2p_i
0	$\frac{1}{70}$	0	0
1	$\frac{16}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{16}{70}$
2	$\frac{36}{70}$	$\frac{72}{70}$	$\frac{144}{70}$
3	$\frac{16}{70}$	$\frac{48}{70}$	$\frac{144}{70}$
4	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{16}{70}$
Total	1	2	$\frac{32}{7}$

Ainsi $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{32}{7} - 4 = \frac{32}{7} - \frac{28}{7} = \frac{4}{7}$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4}{7}} \simeq 0,76$.

Exercice 38 *Correction* :

1. On a les données suivantes :

x_i	$p_i = p(\{X = x_i\})$	p_ix_i	$p_ix_i^2$	$p_i \nearrow$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{75}{6}$	$\frac{4}{6}$
12	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{288}{6}$	1
Total	1	$\frac{41}{6}$	$\frac{367}{6}$	–

On en déduit que

. $E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_ix_i = \frac{41}{6}$,

. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{367}{6} - \frac{1681}{36} = \frac{521}{36} \simeq 14,47$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 3,8$.

2. On a la représentation graphique suivante :

Exercice 39 *Correction* : Afin de déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, on considère les données suivantes :

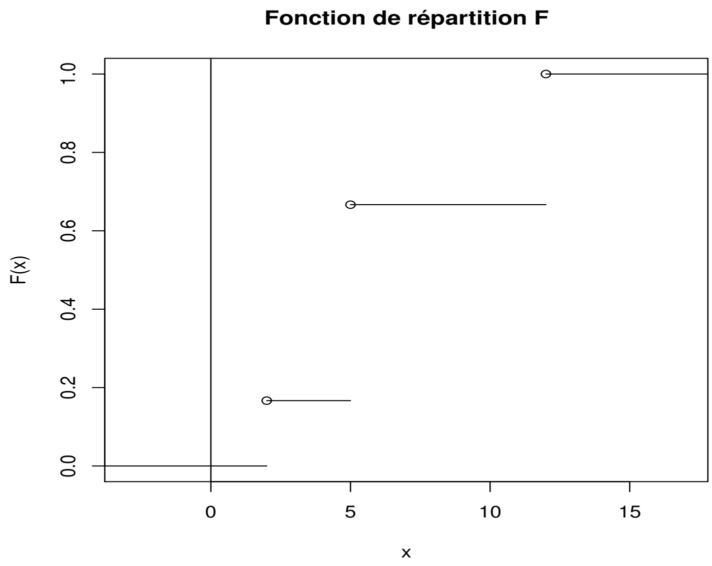

FIGURE 3 –

x_i $(\times 1000)$	$p_i = p(\{X = x_i\})$	$p_i x_i$ $(\times 1000)$	$p_i x_i^2$ $(\times 1000)^2$
70	$\frac{1}{5}$	14	980
90	$\frac{1}{3}$	30	2700
120	$\frac{1}{5}$	24	2880
150	$\frac{1}{6}$	25	3750
200	$\frac{1}{10}$	20	4000
Total	1	113	14310

On a alors $E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i = 113$ qui représente le découvert moyen des comptes en banque d'une entreprise en milliers d'euros.

$\boxed{\textbf{Exercice 40}}$ *Correction* :

1. L'ensemble des résultats possibles est défini par :

$$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,F),(F,P,P),(F,F,P),(F,F,F)\}$$

et $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$.

2. (a) On a le diagramme suivant : La loi de probabilité est alors définie par

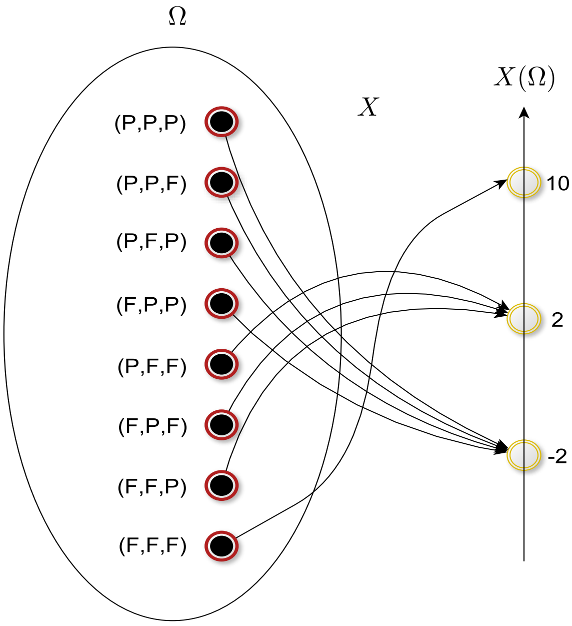

FIGURE 4 –

x_i	$p_i = p(\{X = x_i\})$	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
-2	$\frac{4}{8}$	$-\frac{8}{8}$	$\frac{16}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
10	$\frac{1}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{100}{8}$
Total	1	1	$\frac{128}{8}$

(b) $E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = 1$; l'espérance représente le gain moyen obtenu par le joueur s'il joue un grand nombre de fois. Comme $E(X) \neq 0$, le jeu n'est pas équitable.

Exercice 41 *Correction* : Soit Ω l'univers constitué des tirages simultanés de deux boules. On a

$$\Omega = \{(0,1), (0,2), \ldots, (7,9), (8,9)\}.$$

Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$.

1. L'application X peut être représentée de la manière suivante : On a alors la distribution de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$p_i = p(\{X = x_i\})$	$\frac{9}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

2. On a la représentation graphique suivante :
3. On a
   - $p(A) = p(\{X < 5\}) = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$,
   - $p(B) = p(\{X \leq 3\}) = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$,
   - $p(C) = p(\{1 \leq X \leq 6\}) = F(6) - F(0) = \frac{42}{45} - \frac{9}{45} = \frac{33}{45}$,
   - $p(D) = p(\{X \geq 7\}) = 1 - p(\{X < 7\}) = 1 - \frac{42}{45} = \frac{3}{45}$,
   - $p(E) = p(\{|X - 5| > 2\})$ or $|X - 5| > 2 \Leftrightarrow 2 < X - 5 < -2 \Leftrightarrow 7 < X < 3$, par conséquent

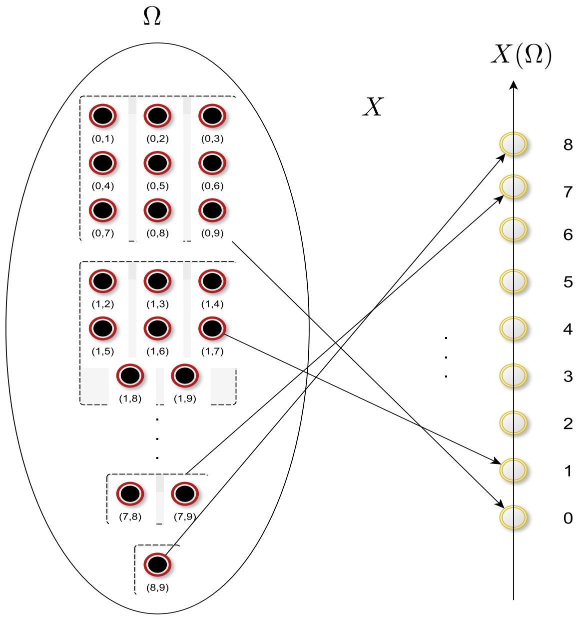

FIGURE 5 –

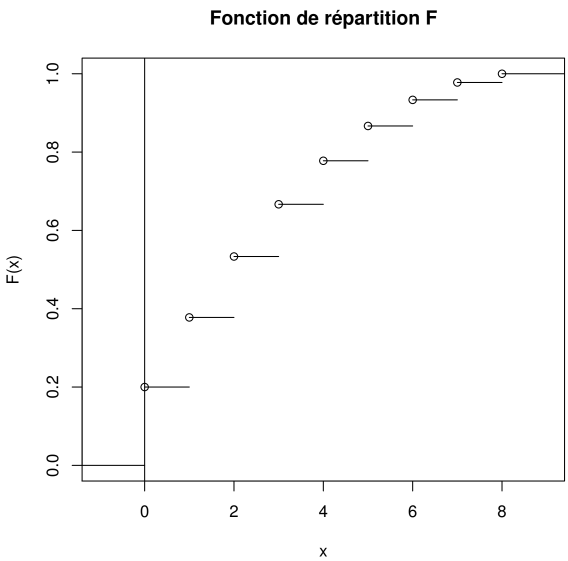

FIGURE 6 –

$$p(E) = p(\{7 < X\} \cup \{X < 3\}) = p(\{X < 3\}) + p(\{X > 7\}) = \frac{24}{45} + \frac{1}{45} = \frac{25}{45}.$$

- $p(G) = p(\{X^2 - 5X + 4 < 0\}) = p(\{1 < X < 4\}) = \dfrac{13}{45}$. En effet, $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$ à l'aide du calcul du discriminant. Donc $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in [1; 4]$.

Exercice 42 *Correction* : Le jet d'un dé non pipé peut être représenté par l'espace $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$ muni de la probabilité p_1 telle que

- $p_1(\{1\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$,
- $p_1(\{2\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$,
- $p_1(\{3\}) = \dfrac{1}{6}$.

L'épreuve des deux jets successifs est alors décrite par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ où $\Omega = \{1, 2, 3\}^2 = \Omega_1 \times \Omega_1$ et où p est la probabilité produit de p_1 par p_1. La probabilité de chaque événement élémentaire de Ω est définie par :

$$\forall (a,b) \in \{1,2,3\}^2,\ p(\{(a,b)\}) = p_1(\{a\})p_1(\{b\}).$$

On a alors

$$\begin{array}{lll} p\{(1,1)\} = \dfrac{1}{4} & ; \ p\{(1,2)\} = \dfrac{1}{6} & ; \ p\{(1,1)\} = \dfrac{1}{12} \\ p\{(2,1)\} = \dfrac{1}{6} & ; \ p\{(2,2)\} = \dfrac{1}{9} & ; \ p\{(2,3)\} = \dfrac{1}{18} \\ p\{(3,1)\} = \dfrac{1}{12} & ; \ p\{(3,2)\} = \dfrac{1}{18} & ; \ p\{(3,3)\} = \dfrac{1}{36}. \end{array}$$

La variable aléatoire X est définie pour chaque tirage (a,b) par $X((a,b)) = a+b$. Elle peut donc prendre les valeurs $1+1$, $1+2$, $1+3$, $2+3$, $3+3$ c'est-à-dire 2, 3, 4, 5 et 6. Alors

- $p(\{X=2\}) = \dfrac{1}{4}$,
- $p(\{X=3\}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$,
- $p(\{X=4\}) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{18}$,
- $p(\{X=5\}) = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{9}$,
- $p(\{X=6\}) = \dfrac{1}{36}$.

La distribution de probabilité de X est finalement $\left(\left(2,\dfrac{1}{4}\right), \left(3,\dfrac{1}{3}\right), \left(4,\dfrac{5}{18}\right), \left(5,\dfrac{1}{9}\right), \left(6,\dfrac{1}{36}\right)\right)$.

Exercice 43 *Correction* : On a le tableau

k	$p_k = p(\{X=k\})$	kp_k	k^2p_k
-6	$\dfrac{2}{10}$	$-\dfrac{12}{10}$	$\dfrac{72}{10}$
-3	$\dfrac{3}{10}$	$-\dfrac{9}{10}$	$\dfrac{27}{10}$
0	$\dfrac{2}{10}$	0	0
3	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{9}{10}$
4	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{8}{10}$	$\dfrac{32}{10}$
Total	1	-1	14

Donc

- $E(X) = -1$,
- $V(X) = 14 - (-1)^2 = 13$ et $\sigma(X) \simeq 3,61$.

L'expression de la variable centrée réduite Y associée à X est donnée par

$$Y = \frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$$

Par conséquent, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(X - (-1)) = \dfrac{\sqrt{13}}{13}X + \dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

La distribution de probabilité de Y est

$$\left(\left(\frac{-5\sqrt{13}}{13}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3}{10}\right), \left(\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{4\sqrt{13}}{13}, \frac{1}{10}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{13}, \frac{2}{10}\right)\right).$$

On peut vérifier que

- $E(Y) = 0$
- $V(Y) = 1$

ce qui est l'intérêt de la variable centrée réduite.

Exercice 44 <u>*Correction*</u> : Ω est l'univers constitué des tirages sans remise de 3 boules dans une urne en contenant 5.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

- $p(\{X = 0\}) = \dfrac{A_3^3}{60} = \dfrac{6}{60}$,
- $p(\{X = 1\}) = \dfrac{2 \times 3 \times A_3^2}{60} = \dfrac{36}{60}$ (2 est le nombre de façons de choisir la boule blanche, 3 est le nombre de façons de placer la boule blanche et A_3^2 est le nombre de façons de lister 2 boules noires parmi 3),
- $p(\{X = 2\}) = \dfrac{3 \times 3 \times A_2^1}{60} = \dfrac{18}{60}$ (3 est le nombre de façons de choisir la boule noire, 3 est le nombre de façons de placer la boule noire et A_2^1 est le nombre de façons de lister 1 boule noire parmi 2),
- $p(\{X = 3\}) = 0$ car on n'a que 2 boules blanches.

On peut vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} p(\{X = k\}) = 1$. On a le tableau suivant :

k	$p_k = p(\{X = k\})$	kp_k	k^2p_k
0	$\frac{6}{60}$	0	0
1	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}$
2	$\frac{18}{60}$	$\frac{36}{60}$	$\frac{144}{60}$
3	0	0	0
Total	1	$\frac{72}{60}$	3

On en déduit que
- $E(X) = 1$,
- $V(X) = 3 - (1)^2 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{2}$.

Exercice 45 <u>*Correction*</u> :

1. On peut aisément vérifier que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F_X(x) = p(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ \dfrac{x}{2\pi} & \text{si } x \in]0; 2\pi[\\ 1 & \text{si } x \in]2\pi; +\infty[\end{cases}.$$
2. On a : $p\left(\left\{0 \leq X \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}\right) = F_X\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F_X(0) = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ et
$p(\{0 \leq X \leq \pi\}) = F_X(\pi) - F_X(0) = \dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Exercice 46 <u>*Correction*</u> :

1. La fonction f vérifie les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[-1; 1]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt$. Or $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} (t+1)dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$, de même $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

   Les propriétés (a), (b) et (c) permettent d'affirmer que f est une densité d'une variable aléatoire X.

2. Par définition, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
   - Si $x < -1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
   - Si $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{-1}^{x} (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.
   - Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} (1-t)dt = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$.
   - si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$.

3. $p(\{X < 0,5\}) = F(-0,5) = \frac{0,5^2}{2} + (-0,5) + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,
   $p(\{-0,5 \leq X \leq 0,5\}) = F(0,5) - F(-0,5) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right] - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$,
   $p(\{X > 0,25\}) = 1 - p(\{X \leq 0,25\}) = 1 - F(0,25) = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}\right] = \frac{9}{32}$.

4. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ existe. Comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[-1;1]$, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-1}^{1} tf(t)dt = \int_{-1}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{1} tf(t)dt = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$, X est donc une variable aléatoire centrée.
   X admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ existe. Comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[-1;1]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt = \int_{-1}^{0} t^2 f(t)dt + \int_{0}^{1} t^2 f(t)dt = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ donc X admet une variance et $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - (E(X))^2 = \frac{1}{6}$.